

Серия «История науки и техники»

В. А. Никифоровский

Вероятностный мир

В. А. Никифоровский Вероятностный мир

Наука

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Серия «История науки и техники»

Серия основана в 1977 году

В. А. Никифоровский

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ МИР

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
А. Г. ГРИГОРЬЯН



МОСКВА ВО «НАУКА»
1992

ББК 22.171
Н 62
УДК 519.21(0.062)

Рецензенты:
кандидат технических наук Ю. В. МЯКИШЕВ,
кандидат физико-математических наук В. М. САФРАЙ

Редактор В. П. ЛИШЕВСКИЙ



Н $\frac{1401020000-279}{054(02)-92}$ 37—91 НП

ISBN 5-02-003523-8

Введение

Взятая Вами в руки книга посвящена одной из важнейших наук математического цикла — теории вероятностей в ее историческом развитии. Вероятностные проблемы связаны с философскими основами мироздания. Издревле высказывались две точки зрения: одни считали, что причиной всему служит случай, другие отвергали его и полагали, что все происходит по необходимости.

Взгляды древних на строение мира из случайного движения и столкновений атомов выразил в поэме «О природе вещей» Тит Лукреций Кар (ок. 99—55 гг. до н. э.):

Как же случилося то, что стеченье материи дало
Землю и своды небес, а также и моря глубины,
Солнца пути и луны,— разъясню я теперь по порядку.
Первоначала вещей, разумеется, вовсе невольно
Все остроумно в таком разместилися стройном порядке
И о движеньях своих не условились раньше, конечно.
Если ж начала вещей во множестве, многоразлично
От бесконечных времен постоянным толчкам подвергаясь,
Тяжестью также своей гнетомые, носятся вечно,
Всячески между собой сочетаясь и все испытуя,
Что только могут они породить из своих столкновений,—
То и случается тут, что они в этом странствии вечном,
Всякие виды пройдя сочетаний и разных движений,
Сходятся так, наконец, что взаимная их совокупность
Часто великих вещей собой образует зачатки:
Моря, земли и небес, и племени тварей живущих
[29, с. 30].

Эта тема у Лукреция варьировалась неоднократно.

Противоположный взгляд высказывает Цицерон. В «Речи стоика, направленной против эпикурейцев, считавших, что мир создан случайным столкновением атомов», помещенной в сочинении «О природе богов», говорится: «Как мне не подивиться тут, что находится кое-кто, убежденный, что какие-то тела, плотные и неделимые, носятся

под действием силы тяжести, и мир получился самым красивым и прекрасным из-за случайного столкновения тел? Я не понимаю, как это считающие так не думают, что если бросать бесчисленное количество слепков двадцать одной буквы алфавита, сделанные из золота или из чего-нибудь другого, то они, упав на землю, сложатся в «Анналы» Энния, так что их можно будет прочесть подряд; хотя я и сомневаюсь, окажется ли случай таким могущественным даже для одного стиха. Так как же они серьезно уверяют, что мир создан благодаря тельцам без цвета, без всякого качества (греки называют его ποιοτησ), которые лишены чувств и сталкиваются случайно?» [1]

Философские категории случайного и необходимого во все века обсуждались повсеместно.

То же самое наблюдается и в физике. С появлением молекулярно-кинетической теории в физике важную роль стала играть вероятность. Сейчас вероятность — фундаментальное понятие физики.

В этой книге философская и физическая стороны случайного не рассматриваются. Причин этому две: при обсуждении их книга выросла бы непомерно и автор не считает себя достаточно подготовленным, чтобы вторгаться в слабо знакомую ему область знаний. Предметом разговора здесь служит теория вероятностей как математическая дисциплина.

Чтобы изложенное было читателю понятно, необходимо сразу же привести некоторые сведения из теории вероятностей. Она оперирует событиями, которые представляются как исходы опытов. События бывают достоверные, невозможные и случайные. Достоверным называется такое событие, которое в результате опыта произойдет непременно. Я. И. Хургин [51, с. 12] как достоверное событие представляет гибель всего живого при температуре в тысячу градусов. Событие называется невозможным, если оно в результате опыта не произойдет, сколько бы раз опыт не повторяли. Тот же автор приводит как пример невозможного события обнаружение жизни при температуре в тысячу градусов. Событие называется случайным, если оно в результате опыта может произойти или не произойти. Пример — выпадение определенного числа очков при бросании игральной кости. С понятием события тесно связано понятие вероятности.

В «Опыте философии теории вероятностей» П. С. Лаплас писал: «Теория случайностей состоит в том, чтобы свести все однородные события к известному числу рав-

новозможных случаев, т. е. таких, существование которых для нас было бы одинаково неопределенно, и определить число случаев, благоприятствующих явлению, вероятность которого отыскивается. Отношение этого числа случаев к числу всех возможных случаев и есть мера этой вероятности, которая, таким образом, не что иное, как дробь, числитель которой есть число всех благоприятных случаев, а знаменатель — число всех возможных случаев» [28, с. 11—12].

Сформулированное Лапласом определение вероятности как отношения числа исходов опыта, благоприятствующих событию (т. е. тех, при которых событие происходит), к общему числу равновозможных исходов опыта получило название классического определения вероятности. Например, вероятность выпадения определенного числа очков при бросании игральной кости равна 1/6, потому что благоприятствует событию один исход, а всего их шесть (6 граней). Существуют и другие определения вероятности, о них упоминается в соответствующих местах книги.

Вероятность некоторого события A обозначается $P(A)$ (P — начальная буква латинского слова probabilitas — вероятность).

Несколько событий называются несовместными, если появление любого из них исключает появление всех остальных. Два события называются независимыми, если вероятность появления одного не меняется в связи с тем, появилось другое или нет.

Уже в начале книги будут упоминаться простейшие теоремы теории вероятностей. Упомянем их. Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий состоит в следующем: вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей их. Записывается так:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Теорема умножения вероятностей двух независимых событий формулируется так: вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей их, т. е.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Отправимся теперь, читатель, к поставленной цели. И не будем отвлекаться на обсуждение сложных проблем в интересующей нас области, которые кое-кому кажутся до сих пор неразрешенными.

Истоки

1

Пытливые исследователи в любом вопросе стремятся установить первоосновы: когда и как что-то возникало, как развивалось, до чего дошло. Это наблюдается в любом виде человеческой деятельности. Один из важнейших разделов математики — теория вероятностей — не служит исключением из правила.

В математической литературе, посвященной теории вероятностей, указывается, что определенную роль в ее создании сыграли азартные игры. (Отметим, что арабское слово «азар» означает «трудный», французское hasard — случай, риск).

Появление азартных игр относится к глубокой древности. Некоторые источники указывают, что игра в кости была придумана кем-то из военачальников ахейцев во время 10-летней осады Трои (ок. 1260 г. до н. э.), чтобы занять воинов. Следовательно, этой игре около 3000 лет.

Но и она не одинока среди подобных игр. В раскопках, относящихся к глубокой древности (начиная с 5 тысячелетия до н. э.), попадались кости с конечностей свиней, овец, телят, называемые астрагалами. При бросании астрагалы могли падать так, что вверх обращалась любая из сторон, которые отмечались различными числами. В Древней Греции была игра с одновременным бросанием четырех астрагалов. Лучшим броском считался тот, когда астрагалы выпадали разными сторонами; его именовали «Венерой».

Орудиями игр служили не только астрагалы и игральные кости, известны также игральные палочки, изготавливаемые из дерева или кости. На четырех гранях палочки в виде бруска наносились одна, две, три и четыре точки. Такие же точки наносились на палочки другой формы или пластинки. При игре палочка бросалась на плоскость и катилась, как карандаш. Учитывались точки на обращенной вверх грани после остановки палочки. Экземпляры игральных костей и палочек находятся в музеях, в том

числе в Эрмитаже, Государственном историческом музее в Москве.

Игральные кости еще до периода, когда появились азартные игры, применялись при различного рода гаданиях и бросании жребия. В древних языческих храмах с помощью игральных костей «выяснялась» воля богов. По прошествии достаточного времени они из рук богов перешли к игрокам, и дело от богов поступило в ведомство случая.

В культурном наследстве имеются свидетельства об азартных играх. Сохранилась амфора VI в. до н. э. с изображением играющих в кости Ахилла и Аякса. Об азартных играх упоминали Данте (1265—1321), Рабле (1494—1553), Эразм Роттердамский (1469—1536), Шарль де Костер (1827—1879).

В Древнем Риме азартные игры разрешались лишь в определенные сезоны. Существовали указы о запрещении азартных игр. Их учреждали Фридрих II (1232 г.), Людовик IX (1255 г.), царь Алексей Михайлович (1649 г.), Екатерина II (1782 г.).

К азартным играм относятся карты, рулетка, различные лотереи. Игральные карты были известны в древности. Современные карты появились во Франции в XIV в.

Генуэзская игра, или генуэзская лотерея, распространенная в Западной Европе, сохранилась до наших дней. Вот как она выглядела. Организаторы ее продавали билеты с написанными на них числами от 1 до 90. Могли быть билеты с двумя, тремя, четырьмя и пятью числами. В определенный день из барабана, содержащего жетоны с числами от 1 до 90, наудачу извлекали пять жетонов. По билету с одним совпавшим числом выплачивалась сумма в 15 раз больше стоимости билета, при выигрыше по двум числам (амбо) — в 270 раз больше, по трем (терн) — в 5500 раз больше, по четырем (катерн) — в 75 000 раз больше, по пяти (квин) — в 1 000 000 раз больше. Однако лотерея рассчитана так, что бы ее организаторы всегда оставались в выигрыше. Вероятность выигрыша, например, по пяти числам составляет около $1/44 \cdot 10^6$, т. е. в среднем выигрывает один из 44 миллионов билетов [1].

2

В практике азартных игр сложились задачи, решение которых способствовало разработке основных понятий сформировавшейся впоследствии теории вероятностей. Может показаться странным, что серьезная, строгая наука,

методы которой сейчас широко применяются во многих теоретических и прикладных отраслях знаний, связана хоть как-то с такой вольной деятельностью человека, как азартные игры. Но ничего странного в этом нет. Игра в кости доставляет тот пример опыта, исходы которого практически равновозможны. А модель урны с шарами позволяет получить вероятностные оценки многих явлений. Не случайно при изучении основ теории вероятностей в настоящее время в учебных заведениях зачастую обращаются к играм, в которых легко подсчитать вероятности происходящих событий.

Одна из первых задач игры в кости состояла в подсчете всех возможных комбинаций цифр при бросании нескольких игральных костей. Известны такие подсчеты для трех игральных костей (без учета порядка), относящиеся к X—XI вв. Об этих попытках мы знаем из художественных произведений.

Самая ранняя попытка предпринята в поэме «De vetula» (О прошлом) Ричарда де Форневиля (1200—1250) [2]. Она приведена в главе о спорте и азартных играх. Из текста следует, что общее число всех исходов при бросании трех игральных костей будет 216: $6 \cdot 1 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 6 = 216$[3].

Эта задача решалась и в дальнейшем. О большом внимании к игре в кости свидетельствует и отрывок из «Божественной комедии» Данте. VI часть «Чистилища» начинается стихами:

Когда кончается игра в три кости,
То проигравший снова их берет
И мечет их один в унылой злости;
Другого провожает весь народ;
Кто спереди зайдет, кто сзади тронет,
Кто сбоку за себя словцо ввернет.
А тот идет и только ухо клонит;
Подаст кому,— идти уже вольней.
И так он понемногу всех разгонит.
Таков был я в густой толпе теней,
Чье множество казалось превелико,
И, обещая, управлялся с ней [17, с. 167].

Следующая задача азартных игр, решаемая методами возникшей позднее теории вероятностей, состояла в справедливом разделе ставки между игроками, когда игра не закончена и каждый выиграл определенное количество партий, меньше условленного. Несколько вариантов ее рассмотрел Лука Пачоли (ок. 1445 — ок. 1515). В 1494 г. он издал книгу «Сумма по арифметике, геометрии, отно-

шениям и пропорциональности», долгое время служившую сводом математических знаний того времени.

В главе «Необычайные задачи» Пачоли решал и задачи на раздел ставки, например такие.

Две компании играют в мяч до 60 очков при ставке в 22 дуката. Одна выиграла 50 очков, а другая 30, после чего игра была остановлена. Как разделить общую ставку?

Двое условились играть до шести выигранных партий. Необходимо разделить ставку после прекращения игры, когда один выиграл пять партий, а другой — две.

Трое стреляют из арбалета с условием, что выигрывает тот, кто первым шесть раз окажется лучшим. К моменту прекращения состязания один имел четыре лучших попадания, другой — три, третий — два. Необходимо справедливо разделить приз.

При решении этих задач Пачоли совершал одну и ту же ошибку. Он делил ставку в отношении, равном отношению чисел выигранных игроками партий до прекращения игры. Ставку в 22 дуката первой задачи он делил в отношении 5 : 3, что дало 13 3/4 и 8 1/4 дуката. Здесь не учитывались вероятности выигрышей на случай, если бы игра была продолжена. Как увидим дальше, к задаче о разделении ставки математики будут еще обращаться неоднократно.

3

Решение рассмотренных задач мы находим у итальянских математиков Д. Кардано и Н. Тартальи.

XV и XVI столетия называют эпохой Возрождения, имея в виду небывалый взлет науки и искусства. Но эти века характеризуются и глубокими социальными преобразованиями: в недрах феодального строя возникали капиталистические общественные отношения, создавалась новая, более прогрессивная формация — буржуазное общество. Расширялось ремесленное производство, наблюдался дальнейший рост городов, оживились торговля и мореплавание. Социальные и экономические преобразования вызвали бурное развитие науки и искусства. Книгопечатание и наличие сравнительно дешевой бумаги сделали достижения науки доступными широким слоям населения.

Утверждение гелиоцентрической системы мира Н. Коперника вместо геоцентрической Птолемея вызвало революционный переворот в естествознании. Новый взгляд

на систему мира дал импульс развитию физических и математических наук. Дальнейшее развитие этот взгляд нашел у Джордано Бруно, сформулировавшего идеи о бесконечности Вселенной и множественности миров.

Достижения науки и прогрессивные идеи средних веков вместе с техническими и производственными усовершенствованиями послужили основой научной революции XVII в.

4

Врач, философ, математик и механик Джироламо Кардано родился 24 сентября 1501 г. в местечке, расположенном недалеко от Милана, в семье юрисконсульта Фацио Кардано. Первоначально отец обучал его юриспруденции, языкам, философии, арифметике, геометрии, астрологии. На восемнадцатом году Джироламо поступил на медицинский факультет университета Павии, где блистал знанием языков, философии, математики, астрологии и умением вести диспуты, в которых участвовал постоянно и с большим успехом — побеждал даже известных профессоров.

После окончания университета и получения звания доктора медицины он занимался врачебной практикой, читал лекции в университетах Павии, Милана, Болоньи, писал книги. Его трактаты «О тонкости» и «О разнообразии вещей» содержали наиболее полное изложение состояния естественных и физических наук в XVI в. Ими долгое время пользовались как учебниками в разных странах. Таковы же его книги по математике.

Основные исследования Кардано посвящены медицине, философии, математике и астрологии. В них уживаются правильные суждения с верой в магию, в духов, хиромантию, различные каббалистические измышления. Не будем подходить к оценке его творчества со строгими критериями: каждый век имеет свои неразрешенные проблемы, передаваемые по наследству потомкам. Верят же и сейчас, в наш просвещенный век, в такие феномены, как летающие тарелки, для пущей учености именуемые НЛО, инопланетян, чудовище озера Лох-Несс, снежного человека, Бермудский треугольник, о которых рассказывается всякое. А сравнительно недавно, в критический период для нашей науки, в литературе обсуждался вопрос о возникновении жизни практически из ничего. Совсем в духе Кардано, который считал возможным зарождение жизни из гнили.

Кого только не лечил Кардано. Тут были итальянцы, англичане, французы, шотландцы, бельгийцы; представители различных сословий: кардиналы, епископы, герцоги, каноники, юристы, врачи, благородные дамы, аптекари, трактирщики, купцы, плотники.

Практической медициной он занимался 51 год и, как утверждал сам, допустил только три ошибки.

Несмотря на то, что Кардано сжег сначала 9 своих книг, а в конце жизни еще 120, изданное в Лионе в 1663 г. собрание его сочинений состояло из 10 больших томов.

Основной труд Кардано по математике — «Великое искусство, или об алгебраических правилах» (1545). Здесь изложены сыгравшие важную роль в развитии науки успехи итальянских математиков в решении уравнений третьей и четвертой степеней и преобразовании уравнений. «Великое искусство...» прославило Кардано.

Нелегкой была временами жизнь Кардано: периоды высокого взлета сменялись глубокими падениями. Когда ему сопутствовал успех, влиятельные вельможи обращались к нему за медицинской помощью. Он состоял профессором в университетах Павии, Милана, Болоньи. Но сразу же после того, как Кардано закончил университет, коллегия миланских врачей не приняла его в свой состав, лишив возможности вести оплачиваемую медицинскую практику, т. е. средств существования. И доктор медицины вынужден был перебиваться случайными заработками. Причиной отказа послужило то, что родители Кардано формально не состояли в браке.

Когда у Кардано было уже трое детей, в возрасте 31 года скончалась его жена, Лючия Бондарени, не выдержавшая трудных условий жизни. В 1560 г. казнили старшего сына Кардано, Джамбаттисту, за то, что он отравил жену. Младший сын, Альдо, бродяжничал, обокрал отца, был осужден. Однажды в припадке гнева Кардано отрезал ему ухо.

В 1570 г. Кардано арестовали и заключили в тюрьму. Причина ареста неизвестна. Это могли быть некоторые неосторожные высказывания в его книгах, не соответствующие религиозным догмам, опубликованный им гороскоп Христа, обвинение в «черной магии», наговоры завистников. После двухмесячного заключения Кардано освободили, однако еще 86 дней он находился под домашним арестом.

Высокопоставленные друзья настаивали на том, чтобы Кардано покинул Болонью и отправился в Рим искать покровительство папы. В конце 1571 г. он действительно

переехал в Рим и в 1573 г. получил от папы пожизненную пенсию. Вот тогда-то он сжег 120 своих книг, отчасти из-за того, что они чем-то отклонялись от церковных догм.

В последние годы жизни Кардано был нелюдим, много размышлял в уединении, приводил в порядок свои рукописи.

Умер Кардано в Риме 20 сентября 1576 г. Обстоятельства смерти его неизвестны.

О смерти Кардано сложилась легенда, будто бы он составил свой гороскоп и для подтверждения правдивости «науки» в соответствующий день умертвил себя. Однако в действительности Кардано «назначил» свою смерть на 5 декабря 1573 г., т. е. на три года ранее.

Обратимся теперь к работам Кардано, связанным с азартными играми. Рукопись «Книги об игре в кости» обнаружена в бумагах Кардано в 1576 г., после его смерти, и вошла в первый том собрания сочинений, изданного в 1663 г. Кардано указывал, что написал книгу в 1526 г.

В главе XI, называемой «О бросании двух костей», Кардано писал: «При бросании двух костей возможны шесть случаев выпадения по два одинаковых числа очков и 15 случаев выпадения разного числа очков, т. е. считая и двойные, 30, следовательно, всего возможно 36 случаев» [58, с. 264].

Кардано учитывал перестановки и соответствующие случаи называл двойными. Это было, например, выпадение 1 на первой кости и 3 на второй, а также 3 на первой и 1 на второй.

Здесь же Кардано установил число появления одной из цифр от 1 до 6 хотя бы на одной кости. Их будет 11. Например двойка может появиться в таких комбинациях: 2 и 1, 2 и 3, 2 и 4, 2 и 5, 2 и 6; 1 и 2, 3 и 2, 4 и 2, 5 и 2, 6 и 2. Найденное значение 11 меньше числа выпадений двух костей, в каждом из которых назначенное число не появляется. В связи с этим Кардано писал: «По отношению к общему числу случаев при бросании двух костей оно составляет больше одной шестой и меньше одной трети» [58, с. 264]. Это означает

$$1/6 < 11/36 < 1/3.$$

Заметим, что дробь 11/36 представляет собой вероятность появления хотя бы один раз определенного числа очков.

Рассуждения Кардано легко проиллюстрировать, если составить, по современной терминологии, дискретное про-

странство элементарных событий, соответствующих бросанию двух костей. Будем отмечать числа выпавших очков на каждой кости и найдем все возможности.

11, 12, 13, 14, 15, 16
21, 22, 23, 24, 25, 26
31, 32, 33, 34, 35, 36
41, 42, 43, 44, 45, 46
51, 52, 53, 54, 55, 56
61, 62, 63, 64, 65, 66

Все 36 исходов при бросании двух костей Кардано назвал серией и писал: «Целая серия игр не дает отклонения, хотя в одной игре это может случиться... при большом числе игр оказывается, что действительность весьма приближается к этому предположению» [58, с. 265].

Некоторые математики вслед за Я. Бернулли, называвшим Кардано «мужем большого ума и проницательности» в связи с приведенным высказыванием, говорили, что в нем можно усмотреть элементарную форму закона больших чисел и статистического понятия вероятности *. Правильно, можно. Все зависит от того, как смотреть. В трудах великих древних можно усмотреть все. И тогда человечество за два тысячелетия не достигло ничего. Однако в наивных взглядах древних следует видеть только то, что в них есть. И не транспонировать наши концепции в древность.

Приведем еще несколько примеров из книги Кардано, чтобы проследить, какими путями шел пытливый ум к истине.

Глава XII книги посвящена анализу бросания трех костей. Кардано писал: «Одинаковое число очков на трех костях выпадает только одним способом, как и в предыдущем примере, стало быть, всех этих случаев 6. Пар же одинаковых чисел с отличающимся от них третьим числом очков — 30. А так как каждое такое сочетание можно получить тремя способами, то это составляет 90. Сочетаний из трех различных очков 20, они видоизменяются шестью способами, это составляет 120 бросаний, всего же комбинаций 216, а половина — 108» [58, с. 265].

Заметим, что и Кардано не умел вычислять общее число исходов при бросании трех костей как $6^3 = 216$.

В главе XIII «О сложных числах, как до шести, так и свыше, и, как для двух, так и трех костей» Кардано установил вероятности выпадения различных сумм очков.

* Об этом говорится дальше.

Он писал: «Десять очков может получиться из двух пятерок и из шестерки и четверки: последнее сочетание возможно при этом в двух видах; таким же образом девять очков может получиться из пятерки и четверки и из шестерки и тройки, так что это составляет 1/9 часть всей серии и две девятых от половины; 8 же очков получается из двух 4, из 3 и 5 и из 6 и 2. Всего же пять возможных случаев составляют приблизительно 1/7 часть из всей серии ... 7 очков составляется из 6 и 1, из 5 и 2, из 4 и 3. Всего, стало быть, имеется 6 возможных случаев, составляющих 1/6 часть всей серии. А 6 получается по такому же расчету, как и 8, 5 — как и 9, 4 — как и 10, 3 — как 11 и 2 — как 12» [58, с. 265].

Здесь фактически определены вероятности $P\ (9) = 1/9$, $P\ (7) = 1/6$, $P\ (8) = 1/7$, а также установлены равенства $P\ (8) = P\ (6)$, $P\ (9) = P\ (5)$, $P\ (10) = P\ (4)$, $P\ (3) = P\ (11)$, $P\ (2) = P\ (12)$. Эти вероятности у Кардано представлены как части серий [4].

Глава XIV книги называется «Об одинаковых числах очков». В ней Кардано указал количества случаев выпадений хотя бы один раз 1; или 1, или 2; или 1, или 2, или 3 и т. д. при бросании двух костей. Количество появлений 1 хотя бы один раз будет $6 + 5 = 11$; количество появлений хотя бы один раз или 1, или 2 получится $11 + 9 = 20$; количество выпадений хотя бы один раз или 1, или 2, или 3 будет $11 + 9 + 7 = 27$ и т. д. Кардано поместил эти числа в таблицу. Их легко найти, если воспользоваться составленным выше дискретным пространством элементарных событий, соответствующих бросанию двух костей. Число 11, например, выпадения хотя бы один раз единицы получится, если сложить числа случаев в первой строке и первом столбце пространства.

Кардано сделал вывод: «Если, стало быть, кто-либо заявит, что он желал бы получить 1, 2 или 3, то ты знаешь, что для этого имеется 27 шансов, а так как вся серия состоит из 36, то остается 9 бросаний, в которых эти числа очков не выпадут; таким образом, эти числа будут находиться в тройном отношении. Следовательно, при четырех бросаниях три выпадения будут благоприятны 1, 2 или 3, и только один раз не выйдет ни одного из этих чисел. Если тот, кто ждет выпадения одного из трех указанных чисел очков, поставит три асса * , а другой — один, то сначала первый выиграет трижды и получит три асса, а затем

* Асс — древнеримская медная монета.

второй выиграет один раз и получит три асса; таким образом, в общем итоге четырех бросаний шансы их всегда сравняются. Стало быть, такие условия расчета в игре — правильные; если же второй из них поставит больше, то ему придется состязаться в игре на неравных условиях и с ущербом для себя; а если он поставит меньше, то с барышом» [58, с. 266].

Затем Кардано рассмотрел случай выпадения 1, 2, 3 или 4 очков и заключил: «Такой же расчет следует применять и при бросании трех костей». По существу, Кардано имел в виду вероятность как отношение равновозможных исходов и сформулировал принципы безобидной игры. Он писал: «Итак, имеется одно общее правило для расчета: необходимо учесть общее число возможных выпадений и число способов, какими могут появиться заданные выпадения, а затем найти отношение последнего числа к числу оставшихся возможных выпадений, приблизительно в такой же пропорции определяются относительные размеры ставок для того, чтобы игра шла на равных условиях» [58, с. 266].

Иными словами, ставки должны быть пропорциональны вероятностям выигрыша. Пусть вероятность выигрыша одного игрока составляет $p = m/n$, тогда другого будет $q = 1 - m/n = (m - n)/n$. Если ставки пропорциональны отношению вероятностей, то получим $p : q = m/n : (m - n)/n = m/(m - n)$. А это и утверждал Кардано.

Не менее содержательны и дальнейшие рассуждения Кардано. Он изложил задачу о выпадении некоторого числа очков по крайней мере один раз при бросании серии из трех костей (216 раз), двух и трех серий. Вот слова Кардано: «Пусть кому-либо необходимо, чтобы выпала одна двойка; этому числу ... соответствует 91, в остатке же 125, умножаем каждое из этих двух чисел в отдельности само на себя и получаем 8 281 и 15 625, т. е. соотношение, почти равное двум к одному ... Если же при метании трех костей было бы необходимо выпадение какого-нибудь одного очка, то получится соотношение чисел 753 571 и 1 953 125; пропорции же этих чисел ближе всего к соотношению пяти и двух, но несколько его превышают» [58, с. 266]. Упоминаемые здесь числа будут: $753\,571 = 91^3$, $1\,953\,125 = 125^3$.

Истолкуем и это высказывание с точки зрения теории вероятностей: похоже, что Кардано интуитивно пользовался теоремой умножения вероятностей двух событий.

Обозначим вероятность одного события $p = m/n$, дру-

того $q = 1 - m/n = (n - m)/n$; тогда $p_1 = m/n \cdot m/n = m^2/n^2$, $q_1 = (n - m)/n \cdot (n - m)/n = (n - m)^2/n^2$. Ставки пропорциональны этим вероятностям, поэтому

$$p_1/q_1 = m^2/n^2 : (n - m)^2/n^2 = m^2/(n - m)^2.$$

Такое отношение ставок и утверждал Кардано. Точно так же он отыскивал отношение ставок при трех сериях бросаний.

В следующих главах Кардано изложил историю азартных игр. Он отметил, что игра в кости была придумана во время Троянской войны Галамедом. Кардано привел высказывания древних об игре в кости, описал приемы жульничества. Упомянул Кардано и об игре с астрагалами.

Азартные игры Кардано обсуждал и в других работах. В «Практике общей арифметики» (1539) он возражал Пачоли по поводу решения задачи о справедливом разделении ставки. Он указал, что, проводя деление ставки пропорционально выигранным партиям, Пачоли не учитывал оставшиеся числа партий, которые еще должны были выиграть игроки. Но сам он при решении ее также допустил ошибку. Он полагал, что если игра должна продолжаться до s партий и игроки выиграли p и q партий, то ставка должна быть разделена в отношении $[1 + 2 + 3 + \ldots + (s - q)] : [1 + 2 + 3 + \ldots + (s - p)]$. Были у Кардано и работы, в которых проводились исследования вопросов комбинаторики.

Подведем итоги творчества Кардано в направлении, на котором формировались основные понятия теории вероятностей. Кардано пользовался классическим и статистическим понятиями вероятности, теоремами сложения вероятностей несовместных событий и умножения вероятностей независимых событий, высказал утверждения, послужившие впоследствии основой для установления закона больших чисел, сформулировал принципы безобидной игры.

Вообще говоря, немало. Но все это можно обнаружить при внимательном чтении с позиций установившейся науки.

5

История распорядилась так, что конкурентом Кардано в науке был Тарталья.

Никколо Тарталья, настоящая фамилия которого, по-видимому, Фонтано, родился в Брешии в 1500 г. Тар-

талья был выдающимся математиком, обладал блестящими способностями и большой силой воли. Прожил он тяжелую жизнь. Шестилетним мальчиком он вместе с родственниками спасался в церкви от жестокости завоевателей его родной Брешии — французских войск. Старинный обычай прятаться в храме не уберег от несчастья: Тарталья получил увечье гортани (в некоторых источниках — нижней челюсти) от удара мечом. Мать обнаружила мальчика в груде тел. После этого Тарталья остался на всю жизнь заикой, что и отразилось на его прозвище (tartaglia — заика).

Бедность не позволила Тарталье получить систематическое образование: он не мог даже обучиться грамоте. В то время родители ребенка обязаны были оплачивать труд учителя в три приема: перед началом занятий — первый взнос, когда ученик достигал в алфавите буквы «к» — второй, по изучении всей азбуки — окончательный расчет. Мать Тартальи, к тому времени овдовевшая, смогла заплатить только аванс, так что мальчик под наблюдением учителя выучил всего лишь половину алфавита. Дальше Тарталья овладевал знаниями сам. Он проявил необыкновенную настойчивость в учении и любовь к наукам. В доме не было бумаги, это не остановило мальчика: он упражнялся в письме и счете на кладбищенских могильных плитах. В книге «Вопросы и различные изобретения» (1546) о трудностях и перенесенных лишениях Тарталья писал: «С тех пор я учился сам, и у меня не было другого наставника, кроме спутницы бедности — предприимчивости».

Известен конфликт между Тартальей и Кардано. История его такова.

Квадратные уравнения математики умели решать (построением) в древности методами геометрической алгебры. Построением же решались кубические и некоторые виды уравнений более высоких степеней арабскими средневековыми математиками. Задача аналитического решения уравнений третьей и четвертой степеней ждала своего разрешения много веков.

Среди итальянских университетов в XVI в. одно из первых мест занимал университет Болоньи. С 1496 по 1526 г. профессором математики был в нем Сципион Даль Ферро (1456—1526). О нем известно очень мало, но утверждается, что в 1505 г. он нашел способ решения кубического уравнения вида

$$x^3 + ax = b, \; a, \; b > 0.$$

Свое решение Даль Ферро не опубликовал, а сообщил его (около 1506 г., по другим источникам — в 1515 г.) своему зятю и преемнику по должности Аннибалу делла Наве и одному из учеников — Фиоре.

С современной точки зрения утаивание научного открытия может показаться странным. Но в те времена поступок Даль Ферро был легко объясним. Журналов, предназначенных для публикации научных статей, еще не было, выпуск книги — дело длительное и дорогостоящее. Но главное даже не в этом. Обладание общим методом решения некоторого класса задач давало ученому большие преимущества перед другими математиками. В описываемую эпоху получил распространение особый вид общения и соревнования ученых — научный диспут (поединок, турнир). Такой поединок по математике состоял в том, что два математика предлагали друг другу для решения определенное количество задач (несколько десятков) с числовыми данными. Выигрывал поединок тот, кто решал большее число предложенных задач. Победитель получал денежное вознаграждение, известность, нередко ему предлагали должность на выгодных условиях.

Неизвестно, принимал ли участие Даль Ферро в таких диспутах, но Фиоре, математик посредственный, участвовал в турнирах неоднократно. И основным его «оружием» был способ, найденный Даль Ферро для решения уравнения $x^2 + ax = b$.

В одном из поединков Фиоре предстояло встретиться с Тартальей. Турнир намечался на 12 февраля 1535 г. Тарталья предполагал, что легко победит Фиоре, но, узнав, что Фиоре владеет секретом Даль Ферро, приложил много усилий, чтобы открыть способ решения кубических уравнений. Его старания не были напрасными. Он писал, что приложил все свое рвение, прилежание и искусство и благодаря счастливой судьбе за десять дней до 12 февраля нашел правило решения таких уравнений.

К диспуту участники подготовили по 30 задач, текст которых был отдан на хранение нотариусу. За каждую решенную задачу полагался приз — 5 сольдо * . В день диспута Тарталья решил все задачи Фиоре, противник же его, по словам Тартальи, не решил ни одной.

Через день после диспута Тарталья решил также урав-

---

* Сольдо — старинная разменная монета.

нение

$$x^3 = ax + b, \ a, \ b > 0.$$

Все это было величайшим открытием. Надо обладать достаточным мужеством, чтобы взяться за задачу, не поддававшуюся усилиям выдающихся математиков около двух тысячелетий. Популярность Тартальи сильно возросла; его приглашали преподавать математику в Вероне, Венеции, Пьяченце, Брешии.

В 1536 г. о решении, полученном Тартальей, узнал Кардано. Он собирался написать большую книгу по математике, которая представляла бы энциклопедию всего известного по арифметике и алгебре. Естественно, что Кардано хотелось поместить в эту книгу и решение уравнения третьей степени. Он отправил Тарталье письмо с просьбой сообщить способ решения таких уравнений. Тарталья вскоре прислал ответ, но без изложения метода решения.

В результате целого ряда предпринятых Кардано шагов 25 марта 1539 г. Тарталья приехал в Милан и встретился с Кардано. Кардано поклялся «на святом божьем Евангелии и как истинно благородный человек» никому не сообщать секрет решения, и Тарталья под впечатлением клятвы сдался. Он считал, что если бы не поверил Кардано, то сам стал бы человеком, не достойным доверия. Тарталья сообщил метод решения кубического уравнения приведенного выше типа в стихотворной форме.

Кардано сначала в стихотворении Тартальи не разобрался и продолжил переписку с ним. В 1545 г. Кардано нарушил клятву и опубликовал решение Ферро—Тартальи в «Великом искусстве...», указав, что Тарталье принадлежит честь открытия «такого прекрасного, превосходящего человеческое остроумие и все таланты человеческого духа, истинно небесный дар, такое прекрасное доказательство силы ума, его постигшего, что уже ничто не может считаться для него недоступным». Несмотря на столь пышное признание заслуг Тартальи, формула решения уравнений третьей степени носит название «формулы Кардано», что, естественно, несправедливо.

Не следует думать в связи с рассказанным плохо о Кардано. Он обладал высокой математической культурой и сделал значительный вклад в теорию уравнений.

Кроме математики, Тарталья занимался механикой, баллистикой. Он решил вопрос о траектории снаряда и

установил, что она всюду представляет собой кривую линию, обнаружил, что наибольшая дальность полета снаряда будет, когда орудие установлено под углом 45° к горизонту. Тарталья первый перевел на итальянский язык «Начала» Евклида.

В литературе нет сведений о том, играл ли Тарталья в кости. Но в своем творчестве он уделил анализу азартных игр достаточно внимания. В «Общем трактате о числе и мере» (1560) он рассмотрел задачу о справедливом разделении ставки между игроками. По поводу решения Пачоли Тарталья писал: «Это его правило мне не кажется ни красивым, ни хорошим, потому что, если бы одна из этих сторон имела 10, а другая вообще не имела никакого количества очков, то, действуя по такому правилу, получилось бы, что одна сторона, имеющая 10 очков, должна была бы взять все, а другая не получила бы ничего, что было бы совершенно лишено смысла» [33, с. 35].

Вслед за этим Тарталья продолжал: «Разрешение такого вопроса является скорее делом юриспруденции, чем разума, так что при любом способе решения этой задачи здесь найдутся поводы для споров» [33, с. 35].

Тарталья иллюстрирует свое правило на задачах. Вот они.

Две стороны играют до 60 очков и поставили по 22 дуката * . Требуется разделить ставку, если одна сторона набрала 10 очков, а другая — ни одного.

Тарталья решает так: 10/60 = 1/6; от 22 дукатов это будет 22/6 = 3 2/3 дуката. Первая сторона получит 22 + + 3 2/3 = 25 2/3, вторая — 22—3 2/3 = 18 1/3 дукатов.

Еще задача. Игра та же самая, но одна сторона набрала 50 очков, а другая 30. Ее решение: 50 — 30 = 20, 20/60 = = 1/3; от 22 дукатов это даст 22/3 = 7 1/3. Первая сторона получит 22 + 7 1/3 = 29 1/3, вторая — 22 — 7 1/3 = = 14 2/3 дукатов.

Как видим, Тарталья решал задачу о разделении ставки, полагая, что отклонение от половины ее должно быть пропорционально разности выигранных партий. Тогда одна сторона получит половину ставки, сложенную с вычисленной по указанному правилу дополнительной частью, а другая — половину ставки без дополнительной части.

---

* Дукат — золотая монета, которую чеканят с 1140 г. Вес монеты 3,4 г.

Решение Тартальи, как Пачоли и Кардано, задачи о разделении ставки ошибочно, потому что в нем нет вероятностной основы.

В том же трактате Тарталья рассмотрел некоторые вопросы комбинаторики. Он сформулировал задачу: «Некто размещает 10 человек и подает столько блюд, сколько может быть различных способов, которыми они могли бы рассесться, с тем чтобы они никогда не сидели второй раз так, как первый». Он установил, что это число $n = 10!$ Затем заявил: «Этого порядка действий я буду придерживаться, если бы было хотя бы 1000 человек или какое угодно число, потому что правило стремится к бесконечности» [33, с. 36].

В главе «Общее правило автора, найденное в первый день поста 1523 г. в Вероне, чтобы уметь найти, сколькими способами может варьировать положение какого угодно количества костей при их метании» Тарталья установил, что одна кость может выпасть 6 способами, две — 21 способом, три — 56 способами и т. д. Все это — без учета перестановок. Он пользовался выражениями:

1) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$,
2) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$,
3) $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$,
4) $1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 = 126$,
5) $1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 = 252$,
6) $1 + 6 + 21 + 56 + 126 + 252 = 462$,
7) $1 + 7 + 28 + 84 + 210 + 462 = 792$,
8) $1 + 8 + 36 + 120 + 330 + 792 = 1287$.

Здесь каждое число последующего выражения представляет собой сумму соответствующих чисел предыдущего.

Тарталья закончил главу словами: «При желании объяснить подробно в письменном виде происхождение всех вышеуказанных шести членов прогрессии потребуется составить целую книгу. Но, действуя таким порядком, ты сможешь узнать, сколькими способами 10 000 костей смогут варьировать при их бросании» [33, с. 36].

В современных понятиях и символике все указанные суммы Тартальи можно записать в виде

$$1 + C_k^1 + C_{k+1}^2 + C_{k+2}^3 + C_{k+3}^4 + C_{k+4}^5 = C_{k+5}^5.$$

Здесь C_n^m — числа сочетаний, $C_n^m = n(n-1)(n-2/\ldots$ $\ldots(n-m+1)/m!$, а k — число костей.

Начало

1

Началом становления теории вероятностей послужило творчество Б. Паскаля и П. Ферма.

Развитие науки в XVI и XVII вв. вылилось в научную революцию. Она характеризуется созданием основы научного естествознания и совершенствованием математики как его рабочего аппарата.

В этом процессе настоятельно проявлялись новые тенденции: наука все более чутко откликалась на запросы практики, обслуживала ее; она развивалась в борьбе с догматизмом; наука базировалась на результатах эксперимента; ее основу составляли механика и математика; новые условия формировали новый тип ученого и диктовали необходимость объединения усилий ученых, что привело к появлению научных кружков, а впоследствии — академий; наконец, наука испытывала на себе влияние передовых идей века.

В рассматриваемое время быстро прогрессировали промышленность, строительство, транспорт, артиллерийская техника, навигация, кораблестроение, мореплаванье, гидротехника. Все виды человеческой деятельности ставили перед наукой все более и более сложные задачи. Однако ошибочно было бы думать, что состояние науки целиком определялось практикой, ее нуждами. В каждой науке есть свои внутренние стимулы, обусловливающие ее прогресс. Необходимо учитывать и наличие обратной связи; развивающаяся наука ставила перед практикой, в свою очередь, новые задачи.

В XVII в. сложилось механическое толкование системы мира: мир рассматривался как механизм, действующий в соответствии с незыблемыми законами механики. В связи с таким взглядом ведущее положение приобрела механика, а вместе с ней — математика.

По причине возросших разнообразных требований практики ученые в большинстве своем были одновременно механиками, математиками, астрономами, инженерами и часто философами.

Потребность ученых в общении породила обширную научную переписку. Во Франции она шла через М. Мерсенна, в Англии — Г. Ольденбурга и Д. Коллинса, в Италии — М. Риччи, в Германии — К. Шотта.

Первые научные академии появились в Италии по образцу академии литературы. В 1560 г. в Неаполе организовалась Академия тайн природы, просуществовавшая недолго. В 1603 г. основана Академия «рысьеглазых» (видящих хорошо), членом которой был Галилей. В 1654 г. в Англии начало функционировать Оксфордское научное общество, преобразованное в 1660 г. в Лондонское Королевское общество. Во Франции Академия наук была создана в 1666 г. на базе научного кружка Мерсенна.

Научные журналы в Англии и во Франции стали выходить с 1665 г. Лейпцигские «Труды ученых» основаны в 1682 г.

Математика XVII в. резко отличается от предшествующей. К XVII в. она включала в себя арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию и занималась преимущественно постоянными величинами. В XVII в. возникли качественно новые разделы математики: аналитическая геометрия, проективная геометрия, исчисление бесконечно малых, содержащее в себе начала важнейших дисциплин — теории дифференциальных уравнений, теории рядов, вариационного исчисления, дифференциальной геометрии.

Наличие зрелой математики обеспечило становление теории вероятностей.

2

Математик, механик, физик, философ, один из основателей французской классической литературы — гениальный Блез Паскаль родился 19 июня 1623 г. в городе Клермон-Ферране в дворянской семье. Отец его, Этьен Паскаль, был человеком высокой культуры: хорошо знал языки, литературу, историю, философию, физику, увлекался геометрией (его имя сохранилось в математике — одна из кривых названа улиткой Паскаля).

Блез с детства отличался слабым здоровьем, поэтому отец решил не перегружать его серьезными занятиями математикой, латинским и греческим языками, а постепенно знакомил с географией, историей, грамматикой. Этьен Паскаль рано обнаружил исключительную одаренность сына и принял решение посвятить себя воспитанию детей и занятию любимой геометрией. С этой целью он, по обычаям того времени, продал свою должность судьи

в Клермоне и в 1613 г. переехал с семьей в Париж, где включился в работу кружка Мерсенна.

Вокруг монаха Марена Мерсенна группировались выдающиеся парижские естествоиспытатели. В его келье обсуждались результаты проведенных наблюдений, экспериментов, теоретических изысканий, поступившие из других стран научные новости. Через Мерсенна шла переписка по всем важным и спорным научным вопросам.

Однажды Блез попросил отца рассказать ему о геометрии. Отец в общих чертах объяснил, что в геометрии изучаются различные фигуры, соотношения между ними и их элементами. Этого оказалось достаточно, чтобы возбудить фантазию Блеза: он самостоятельно открыл несколько теорем геометрии. Отец, случайно заставший сына за занятиями, был потрясен, увидев различные чертежи на полу, на стенах и подоконниках, которые мог изобразить только осведомленный в геометрии человек. Он немедленно изменил намеченный план обучения и дал Блезу «Начала» Евклида (365— ок. 300 гг. до н. э.), которые юноша прочитал самостоятельно; мало того, он дополнял их, комментировал [1]. Так началось знакомство Паскаля с математикой.

Описанный эпизод привел к тому, что 13-летний Блез стал вместе с отцом посещать ассамблеи кружка Мерсенна и обсуждать на них различные проблемы.

В возрасте 16 лет Блез написал «Опыт конических сечений». Это был конспект большого трактата, который Паскаль так до конца и не довел.

В 1641 г. Этьен Паскаль получил должность интенданта в Руане и вместе с семьей переехал туда. По роду службы Этьену пришлось выполнять большой объем вычислений. У помогавшего ему сына возникла идея создать счетную машину. Он начал работать над ней в 1642 г., и через три года она была готова. 22 мая 1649 г. Паскаль получил за свою счетную машину королевскую привилегию, устанавливающую его приоритет и дающую ему право изготавливать и продавать такие машины.

Счетная машина прославила Паскаля, но распространения не получила ввиду сложности и дороговизны. У Паскаля же напряженная работа над ней вызвала резкие головные боли, с тех пор не прекращавшиеся.

В октябре 1646 г. Паскали получили известие от Мерсенна о физических опытах, проводимых в Италии Э. Торричелли (1608—1647). С этого времени 23-летний Блез Паскаль обратился к исследованиям, связанным с атмо-

сферным давлением. Он ставит опыты сначала в Руане перед жителями города, а в сентябре 1647 г. — в Париже перед группой ученых, среди которых были Мерсенн, Роберваль (1602—1675) и Р. Декарт (1596—1650), приехавший из Голландии по делам.

Паскаль не только повторил опыты Торричелли. Видя объяснение подъема ртути в трубке в воздействии атмосферного давления, он пришел к выводу, что на разных высотах уровень ртути в трубке должен быть различным. Поставленный 19 сентября 1648 г. опыт блестяще подтвердил предсказанный Паскалем результат.

В эти годы он выдержал жестокую дискуссию с иезуитами по поводу боязни пустоты, открыл известный всем закон, говорящий о том, что давление в жидкости распространяется во все стороны одинаково, высказал идеи высотомера, гидравлического пресса.

К тридцати годам творческий дар Паскаля проявился во всем блеске, но религия украла у науки этого гения. Д. Дидро (1713—1784) писал: «Паскаль, отравленный религиозными убеждениями, измучил свое сердце и ожесточился. Он довел до отчаяния сестру, которую любил и которая нежно любила его, и все из опасения, что чувство, столь естественное и столь сладостное, отнимет у них обоих частицу той любви, которую они должны были отдавать богу. Ах, Паскаль, Паскаль» [46, с. 281].

В 1651 г. скончался Этьен Паскаль. Тяжелые мысли о бренности существования терзали Блеза Паскаля. В эти дни его сестра Жаклина ушла в монастырь Пор-Рояль, оплот янсенизма.

В ноябре 1654 г. Паскаль испытал потрясение, оказавшее влияние на его судьбу. Он отправился с друзьями в коляске на прогулку. Вблизи деревни Нейи, недалеко от Парижа, пришлось проезжать по мосту через Сену. Мост ремонтировался, в средней его части не было перил. Лошади чего-то испугались, рванулись и упали с моста в воду. Произошло невероятное: постромки оборвались, и коляска остановилась на самом краю моста. Паскаль, видевший свалившихся в реку лошадей, потерял сознание. Возбужденный ум Паскаля воспринял спасение как указание свыше. Он прекратил научную деятельность и навсегда поселился в Пор-Рояле.

Здесь он включился в борьбу с иезуитами в защиту атакованного ими янсенизма и Антуана Арно, вождя янсенистов [2]. Паскаль написал знаменитые «Письма к провинциалу», нанесшие сильнейший удар иезуитам.

Он задумал также большую книгу «Апология христианства». Завершить замысел Паскаль не успел, но оставил много записей. После его смерти они были изданы под названием «Мысли». «Письма к провинциалу» и «Мысли» — классические образцы французской литературы.

А здоровье Паскаля убывало. Как-то весной 1658 г. ночью он страдал от зубной боли. Чтобы отвлечься, стал думать о модной тогда кривой — циклоиде, о которой еще раньше ему говорил Мерсенн. Мысли так захватили Паскаля, что зубная боль отступила; перед ним вставали одна теорема за другой.

В июне объявили конкурс — предлагалось решить шесть задач, связанных с циклоидой и телами, полученными при ее вращении. Победителем конкурса стал Паскаль; премию он употребил на печатание своих трактатов по математике.

Два последних года жизни Паскаля были крайне тяжелыми: к прогрессирующим болезням добавились душевные страдания. Паскаль жил только «спасением души», лишал себя пищи, воды, сна. Он осудил занятия наукой, отрекся от написанных им трудов. На голом теле носил пояс с торчащими гвоздями; при появлении какой-либо мысли ударял по нему локтем и вонзал гвозди в себя, изгоняя недостаточно набожную мысль. В подкладку камзола зашил «амулет» — кусок пергамента с написанными «святыми заклинаниями». Умер Паскаль 19 августа 1662 г. на сороковом году жизни. Сестра Паскаля Жильберта написала довольно полную биографию брата. Первое собрание сочинений Паскаля вышло в 1779 г.

Приведем одно высказывание Паскаля: «Все наше достоинство заключено в мысли. Не пространство и не время, которых мы не можем запомнить, возвышают нас, а именно она, наша мысль. Будем же учиться хорошо мыслить: вот основной принцип морали» [24, с. 6].

Л. Н. Толстой в беседе с французским журналистом Бурдоном в 1904 г. говорил: «Ах, Паскаль, вот писатель, что за ум, что за человек! Какое несчастье, что он сбился с пути во второй части своих «Мыслей» и что у него не хватило сил идти до конца!... Да, это так, он испугался, он сам нагнал на себя ужас, церковное учение вновь овладело им, и он умер, не освободившись. Да, это была огромная потеря для человеческого разума...» [24, с. 325—326].

3

В этот период становления теории вероятностей, к которому мы подошли, Паскаль и Ферма работали над одной и той же тематикой и в некотором смысле параллельно, поэтому имеет смысл сразу же сообщить основные сведения о Ферма.

9 февраля 1665 г. в «Журнале ученых» был помещен некролог о П. Ферма, в котором говорилось: «Это был один из наиболее замечательных умов нашего века, такой универсальный гений и такой разносторонний, что если бы все ученые не воздали должное его необыкновенным заслугам, то трудно было бы поверить всем вещам, которые нужно о нем сказать, чтобы ничего не упустить в нашем похвальном слове» [1, с. 37].

Эти слова о Ферма еще более значимы, если учесть, что при жизни его опубликовано всего одно сочинение — «О сравнении кривых линий с прямыми» (1660).

Жизнь Ферма не была бурной и не изобиловала внешними событиями. Известно о нем мало. Считается, что родился он, жил и умер в Тулузе.

Начальное образование Ферма получил у францисканцев [3]. В коллеже он хорошо изучил языки — греческий, латинский, испанский, итальянский и впоследствии писал стихи на латинском, французском и испанском.

Предполагается, что Ферма получил юридическое образование в Тулузе. После окончания университета он стал заниматься адвокатурой, а все свободное время отдавал изучению трудов древних авторов и математике. Он слыл знатоком античности; современников поражали его знания языков, латинской и греческой филологии.

Хотя частная адвокатская практика Ферма проходила успешно, он решил перейти на государственную службу и 14 мая 1631 г. стал чиновником кассационной палаты Тулузского парламента. (Парламентами во Франции назывались окружные суды, учрежденные Филиппом Красивым в XIV в.)

В том же году Ферма женился на Луизе де Лонг, дочери советника парламента. В семье Ферма было пятеро детей. Старший сын, Сэмюэль-Клемент, в 1679 г. издал первое собрание сочинений отца.

По службе за 34 года Ферма поднялся до звания советника следственной палаты; он был известен как глубокий знаток права и честный юрист. Ферма вел довольно уединенную жизнь, тратя свое время на службу и занятия

наукой. Выезжал из Тулузы он только по служебным делам. В одну из таких поездок 12 января 1665 г. Пьер Ферма скончался.

Достижения Ферма в различных областях науки становились известными из его обширной переписки. Среди его корреспондентов были Мерсенн, Этьен и Блез Паскали, Декарт, Роберваль, Торричелли, Гюйгенс, Кавальери, Валлис, Каркави, де Бесси, Лалубер, Гассенди и др.

Некоторые результаты Ферма помещали в свои книги его друзья. Так, способ отыскания экстремумов функций, открытый Ферма, изложил П. Эригон в «Курсе математики» (1642). Письма Ферма публиковались его корреспондентами еще при жизни ученого.

Иногда Ферма упрекали в хвастовстве. (Декарт однажды сказал: «Г-н Ферма — гасконец, я — нет».) Возможно, такое мнение возникло из-за того, что Ферма отправлял математикам «вызовы», предлагая решить те или иные задачи. В письме к английским математикам он предложил доказать, что уравнение Пелля $ax^2 + 1 = y^2$ имеет бесчисленное множество решений, и найти их при $a = 109$, 149 и 433. Эти значения выбраны из соображений, что наименьшие решения для них получаются очень большими и их невозможно найти подбором.

Ферма сделал значительный вклад в математику. Вместе с Декартом он заложил основы аналитической геометрии, с Паскалем — теории вероятностей. Велики его достижения, предваряющие приложения определенного интеграла.

Ньютон писал, что мысли о дифференциальном исчислении у него возникли при рассмотрении способа проведения касательных Ферма.

Неоценим его вклад в теорию чисел. Ферма из многих ее вопросов, занимавших его предшественников, выделил те, которые стали основными в исследованиях математиков XVIII и XIX вв. Всем известна не доказанная до сих пор в общем виде Великая теорема Ферма о неразрешимости в целых (и рациональных) числах уравнения $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$, давшая импульс многим тонким исследованиям.

4

В некоторых источниках указывается, что друг Паскаля кавалер де Мере был страстный игрок и увлекался математикой. Неизвестно, удалось ли ему приобщить к азарт-

ным играм Паскаля, но своими задачами об игре в кости Паскаля он заинтересовал.

Первая задача де Мере, о которой Паскаль писал Ферма, состояла в определении числа бросаний двух костей, с тем чтобы шансы выпадения двух шестерок были выше шансов невыпадения их. Де Мере получил два ответа: 24 и 25 бросаний. Это вызвало у него недоумение; как писал Паскаль в письме к Ферма, де Мере во всеуслышание заявил, что теоремы непостоянны, что арифметика себя опровергает.

Как получаются 24 бросания? Рассмотрим бросание одной кости. Вероятность появления хотя бы одного события при однотипных опытах в настоящее время вычисляется по формуле $p_n = 1 - q^n$, где q — вероятность непоявления события в одном опыте (вероятность противоположного события). В нашем случае $q = 5/6$, и вероятность p_n должна быть больше $1/2$. Это означает, что $1 - (5/6)^n > 1/2$, $(5/6)^n < 1/2$. Находим $(5/6)^3 > 1/2$, $(5/6)^4 < 1/2$. Следовательно, $n = 4$.

Де Мере, видимо, было известно эмпирическое правило, состоящее в том, что числа благоприятствующих исходов в двух однотипных опытах пропорциональны общим числам исходов. Оно для бросания двух костей дает $4 : x = 6 : 36$, $x = 24$.

В противоположность этому известному тогда факту де Мере установил, что число бросаний должно быть равно 25. После этого он и выдвинул обвинения против математики. И обратился за помощью к Паскалю.

Пойдем по тому же пути для нахождения другого результата. Вероятность выпадения двух шестерок при бросании двух костей равна $1/36$, невыпадения — $1 - 1/36 = 35/36$. Тогда $p_n = 1 - (35/36)^n > 1/2$, $(35/36)^n < 1/2$. Расчеты показывают, что $p_{24} = 0{,}4914$, $p_{25} = 0{,}5055$.

Заметим, что экспериментально эти результаты проверить непросто: требуется выполнить свыше 100 серий бросаний по 24 и 25 бросков, чтобы обнаружить отклонение вычисленных вероятностей от $1/2$. Вряд ли мог де Мере установить, что $p_{24} < 1/2$, а $p_{25} > 1/2$.

Паскаль в письме к Ферма не указал, каким путем пришел к правильному результату (25 бросаний), и сообщил, что то же самое получили Роберваль и де Мере.

Вторая задача де Мере, обсуждавшаяся в переписке Паскаля и Ферма, состояла в разделении ставки при незаконченной игре. Паскаль решил ее, но прием Паскаля вызвал возражение Роберваля, и Паскаль обратился

при посредничестве Каркави, королевского библиотекаря, к Ферма. Ферма решил задачу и получил такой же результат, что вызвало восхищение Паскаля: «Истина одна и та же и в Париже, и в Тулузе».

Письмо Ферма с его решением не сохранилось. Метод Ферма можно уяснить из письма Паскаля к нему от 24 августа 1654 г. Задача формулируется так: играют двое, победителем считается тот, кто первый выиграет s партий. Игра была прервана, когда игрок A выиграл a партий, а игрок B — b партий. Ферма считал, что до окончания игры потребуется самое большее $s - a + s - b + 1$ партий. Рассматриваются все возможные исходы их. Если A выиграет α партий, а B — β то ставка должна быть разделена в отношении $\alpha : \beta$. В случае $s = 3$, $a = 1$, $b = 0$ число оставшихся партий не будет превосходить четырех. Различных исходов этих партий $4^2 = 16$. Обозначим выигрыши первого игрока a, второго b и составим таблицу всех возможных исходов этих 16 партий:

a a a a	*a a a a*	*b b b b*	*b b b b*
a a a a	*b b b b*	*a a a a*	*b b b b*
a a b b	*a a b b*	*a a b b*	*a a b b*
a b a b	*a b a b*	*a b a b*	*a b a b*
1 1 1 1	1 1 1 2	1 1 1 2	1 2 2 2

Цифры 1 и 2 в нижней части таблицы указывают выигрыши игроков A и B. Игрок A окажется победителем 11 раз, B — 5 раз. Отсюда следует, что A получит 11/16 ставки, B — 5/16. Таким образом, Ферма делил ставку в отношении вероятностей выигрышей.

Ферма устранил ошибку Паскаля, допущенную при делении ставки между тремя игроками. Когда первому игроку недостает до выигрыша одной партии, а второму и третьему — по две, Ферма установил, что ставку следует разделить в отношении 17 : 5 : 5.

Паскаль получил результат Ферма с помощью других соображений. Он начал решать задачу о разделении ставки между двумя игроками со случая, когда $s = 3$, $a = 2$, $b = 1$. Если следующую партию выиграет A, то он получит всю ставку, если же выиграет B, то шансы игроков сравняются. Обе эти возможности равновероятны. При прекращении игры перед этой партией игрок A может претендовать на $1/2 + 1/2 \cdot 1/2 = 3/4$ ставки.

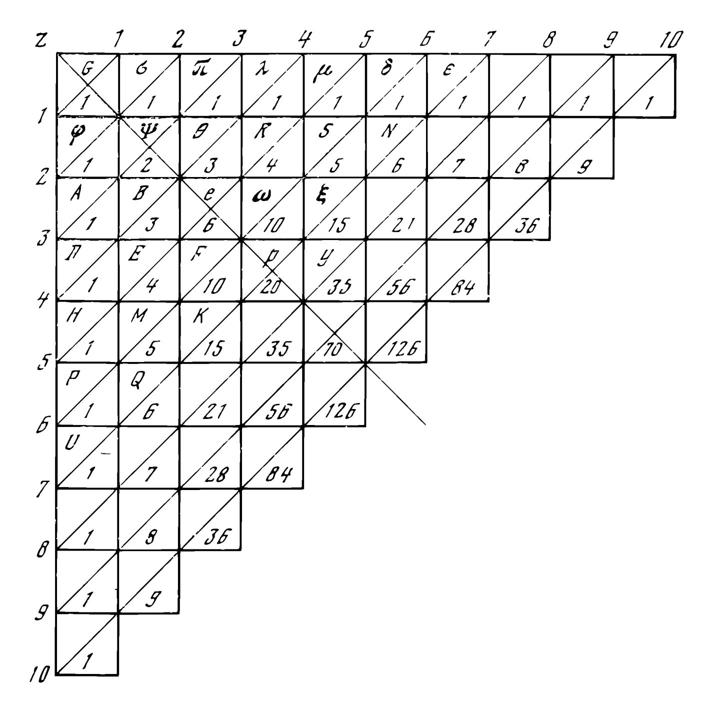


Рис. 1

Если A выиграл две партии, а B не выиграл ни одной ($a = 2$, $b = 0$), то выигрыш следующей партии обеспечит A победу, а проигрыш приведет к тому, что он может требовать 3/4 ставки. При прекращении игры перед указанной партией A может претендовать на $1/2 + 1/2 \cdot 3/4 = 7/8$ ставки.

Пусть теперь A имеет только одну выигранную партию, а B — ни одной. Следующая партия с одинаковой вероятностью может привести к предыдущему случаю или сравнять шансы игроков. Если игра прекращена перед этой партией, то A может рассчитывать на $1/2 \cdot 7/8 + 1/2 = 11/16$ ставки. Получился тот же результат, что и у Ферма.

Паскаль и Ферма решали и другие задачи. В скрытой форме они пользовались понятием вероятности, теоремами сложения и умножения вероятностей.

Более совершенное решение задачи о разделении ставки приведено в «Трактате об арифметическом треуголь-

нике» Паскаля, опубликованном посмертно в 1665 г. Ей посвящен специальный параграф.

Треугольник Паскаля изображен на рис. 1. В нем числа по диагоналям представляют собой коэффициенты разложения $(a+b)^n$ при различных значениях n, т. е. числа сочетаний.

Разделение ставки Паскаль осуществлял следующим образом.

Складывались количества недостающих партий и в треугольнике отыскивалась та диагональ, на которой количество клеток равно найденной сумме. Количества благоприятствующих исходов для игроков определялись так: первый игрок получал сумму такого количества членов по выбранной диагонали, которое равно числу недостающих партий у второго игрока, второй — сумму, в которой количество слагаемых равно числу недостающих партий у первого игрока.

Пусть первому игроку недостает трех партий, а второму — четырех; $3+4=7$. Находим в треугольнике соответствующую диагональ и определяем благоприятствующие исходы: для первого игрока $1+6+15+20=42$, для второго — $1+6+15=22$. Ставка должна быть разделена в отношении $42/22=21/11$.

Очевидно, она делилась в отношении, пропорциональном вероятностям выиграть ставку. Покажем это. Игрокам требовалось сыграть не более шести партий. Первый игрок имеет следующее количество благоприятствующих исходов:

$$1+C_6^1+C_6^2+C_6^3=42.$$

Здесь 1 — один исход, когда он выиграет все шесть оставшихся партий, C_6^1 — шесть исходов, когда он выиграет пять партий из шести, C_6^2 — пятнадцать исходов, когда выиграет четыре партии, C_6^3 — двадцать исходов, когда выиграет три партии. Всего же исходов $2^6=64$. Следовательно, вероятность выигрыша первым игроком равна $42/64=21/32$. Точно так же может быть подсчитана вероятность выигрыша вторым игроком, она будет $22/64=$ $=11/32$. Всю ставку следует разделить в отношении $42/64:$ $:22/64=21/11$.

Паскаль записывал доли игроков в виде отношений сумм букв, стоящих в клетках треугольника. Когда одному игроку недостает двух партий, а другому — четы-

рех, их доли будут

$$\frac{P+M}{P+M+F+\omega+S+\delta}, \quad \frac{F+\omega+S+\delta}{P+M+F+\omega+S+\delta}$$

Хотя арифметический треугольник и доставлял возможность упростить и ускорить счет, принципиально нового в решение задач, связанных с азартными играми, он не добавлял.

Важную роль в развитии теории вероятностей сыграло небольшое исследование Х. Гюйгенса «О расчетах в азартной игре», вышедшее на латинском языке как приложение к «Математическим этюдам» Ф. ван Схоотена (1657).

Незначительная по своим размерам и численности населения Голландия в XVII в. была передовой в политическом и экономическом отношениях страной, переживавшей пору бурного расцвета. В Голландии раньше, чем в остальных странах Западной Европы, произошла буржуазная революция, завершившаяся в 1609 г. Освобождение от испанского ига, гнета инквизиции, сословных ограничений создало условия для развития экономики, науки, искусств, общественной мысли.

В стране работали выдающиеся ученые, получило широкое распространение книгопечатание, развивалась сеть университетов, в которых обучались студенты различных сословий из многих стран Европы.

Голландию прославили работавшие тогда ее великие представители Х. Гюйгенс, А. Левенгук, Б. Спиноза, Г. Гроций, Ф. Гальс, Рембрандт ван Рейн.

В Голландии, допускавшей свободу взглядов и вероисповеданий, нашли пристанище француз-католик Р. Декарт, португальский философ-атеист Уриэль да Коста, выдающийся чешский мыслитель Ян Амос Коменский, английский философ Джон Локк.

Христиан Гюйгенс родился 14 апреля 1629 г. в Гааге в семье дипломата и поэта Константина Гюйгенса, в конце жизни ставшего председателем Государственного совета. Отец Христиана поддерживал многочисленные связи в политических, литературных и научных кругах не только Голландии, но и других стран.

У Христиана были три брата и сестра. Первоначально детей учили дома — языкам, истории, географии, астрономии, математике, музыкальной грамоте, рисованию, основам стихосложения. Не забывались и физические упражнения: танцы, плаванье, катание на коньках.

Христиан рано проявил склонность к точным наукам и показывал большие успехи.

В мае 1645 г. Христиан и его брат Константин поступили на юридический факультет Лейденского университета. Здесь Христиан под руководством Ф. ван Схоотена (1615—1660) изучал математику Декарта. Ван Схоотен содействовал тому, что Гюйгенс впоследствии поддерживал связи с Декартом и Мерсенном.

После переезда отца в Гаагу с 1647 г. Христиан продолжил учебу в университете Бреды вместе с братом Лодевиком.

Гюйгенс много путешествовал. Он несколько раз посетил Париж, где познакомился с ведущими учеными, Антверпен, Амстердам, Брюссель, Лондон. Во время пребывания в Париже в 1655 г. Гюйгенс узнал от Роберваля об исследованиях Ферма и Паскаля, связанных с азартными играми, и заинтересовался ими. В Гааге ему вскоре удалось получить свои результаты. Так появился трактат Гюйгенса об игре в кости.

Исследования Гюйгенса по математике, оптике, астрономии, изобретение маятниковых часов, открытие с помощью изготовленного им самим телескопа, кольца и спутника Сатурна получили широкую известность. В 1663 г. Гюйгенса избрали членом Лондонского королевского общества. Он стал первым иностранным членом его.

В 1666 г. при организации французской академии наук встал вопрос о ее президенте. Выбор пал на Гюйгенса как наиболее значительного представителя точных наук в Европе. 21 апреля 1666 г. Гюйгенс выехал из Гааги и стал первым президентом французской академии, которой успешно руководил 15 лет.

В 1681 г. Гюйгенс поехал на лечение в Гаагу. Ему уже не довелось вернуться во Францию, потому что в 1685 г. там был отменен принятый в 1598 г. Нантский эдикт, предоставлявший гугенотам некоторую свободу вероисповедания и гражданские права. Гюйгенс был протестантом, с отменой эдикта возвратиться во Францию не смог и продолжал интенсивную научную работу у себя на родине.

Умер Гюйгенс 8 июля 1695 г.

Вклад Гюйгенса в науку велик. Отметим важнейшие его достижения. В вышедшем в 1673 г. трактате «Маятниковые часы» содержится не только описание изобретенных им в 1657 г. часов, но и излагаются фундаментальные открытия в механике и инфинитезимальной математике. «Трактат о свете» Гюйгенса стал основой волновой теории распро-

странения света. Кроме упомянутых открытий спутника и кольца Сатурна, Гюйгенс обнаружил туманность в созвездии Ориона и определил время обращения Марса вокруг оси.

Интересующее нас сочинение Гюйгенса «О расчетах в азартной игре» выдержало несколько изданий и переводов и было первым и единственным печатным трудом по теории вероятностей до начала XVIII в.

В предисловии к трактату Гюйгенс пишет: «...я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории» [30, с. 56].

Книга состоит из введения и 14 предложений. Во введении Гюйгенс писал: «Хотя в играх, основанных на чистом случае, результаты являются неизвестными, однако шанс игрока на выигрыш или на проигрыш имеет определенную стоимость. Например, если кто-нибудь держит пари, что он выбросит при первом бросании кости шесть очков, то неизвестно, выиграет ли он или проиграет, но что является определенным и поддающимся вычислению, это то, насколько его шансы проиграть пари превосходят его шансы на выигрыш пари» [30, с. 57].

Здесь «стоимость шанса» предваряет дальнейшее понятие вероятности.

Первые три предложения, следующие за введением, определяют «стоимость шансов» в различных условиях.

Предложение 1. Если я имею равные шансы получить a или b, то это мне стоит $(a + b)/2$. . .

Предложение 2. Если я имею равные шансы на получение a, b или c, то это мне стоит столько же, как если бы я имел

$$(a + b + c)/3 \ldots$$

Предложение 3. Если число случаев, в которых получается сумма a, равно p, а число случаев, в которых получается сумма b, равно q, и все случаи одинаково могут произойти, то стоимость моего ожидания равна $(pa + qb)/(p + q)$ [30, с. 57].

Этим предложениям Гюйгенс дал доказательства. Предложение 3 содержит простейшую форму математического ожидания, вошедшего в теорию вероятностей.

Предложения 4—8 относятся к задаче о разделении ставки. Вот как выглядит предложение 4: «Предположим, что я играю против другого лица на то, кто первым вы-

играет 3 партии, и что я уже выиграл 2 партии, а он 1. Я хочу знать, какая часть ставки причитается мне в случае, когда мы хотим прервать игру и справедливо разделить ставки ...

Нужно заметить сначала, что достаточно принять во внимание число партий, недостающих той и другой стороне. Так как верно, что если бы мы играли на то, кто первым выиграет 20 партий, и если бы я выиграл 19 партий, а мой противник 18, то я имел бы такое самое преимущество, как и в изложенном случае, где при 3 партиях я выиграл 2, а он только 1, и это потому, что в обоих случаях мне недостает только одной партии, а ему двух. Затем, чтобы вычислить часть, причитающуюся каждому из нас, нужно обратить внимание на то, что произошло бы, если бы мы продолжали игру. Верно, что если бы я выиграл первую партию, то я закончил бы игру и таким образом получил бы полностью сумму ставки, которую я обозначу a. Но если первую партию выигрывает мой противник, то наши шансы отныне станут равными, принимая во внимание, что каждому из нас будет недоставать по одной партии; значит, каждый из нас имел бы право на $a/2$. Очевидно, что я имею столько же шансов выиграть первую партию, как и проиграть ее. Значит, я имею равные шансы получить a и $a/2$, что, согласно первому предложению, эквивалентно сумме половин, т. е. $3a/4$, так что моему противнику остается $a/4$ [30 с. 5, 8].

Как видим, Гюйгенс в общем виде сформулировал принцип решения задачи о разделении ставки, которым пользовался Паскаль.

В предложении 9 Гюйгенс рассмотрел задачу о разделении ставки между тремя игроками. Он сформулировал правило: «Чтобы вычислить часть ставки, причитающейся каждому игроку при каком угодно их числе и условии, что каждому из них недостает определенного числа партий, нужно сначала принять во внимание, что будет причитаться интересующему нас игроку, если он сам или кто-нибудь другой из игроков выиграет очередную партию. Эти части нужно сложить и полученную сумму разделить на число игроков, что укажет искомую часть ... Следует вначале исследовать наиболее простые случаи и потом с их помощью рассматривать следующие. Согласно этому способу можно вычислить все случаи, которые приведены в таблице, и бесконечное число других случаев» [30, с. 59].

Руководствуясь этим правилом, Гюйгенс составил таб-

лицу, в которой указал различные количества недостающих партий для трех игроков и доли ставки, которые они должны получить. Например, когда игрокам недостает одной, одной и двух партий, доли ставки будут 4/9, 4/9 и 1/9. Следовательно, Гюйгенс делил ставку пропорционально вероятности выигрыша при продолжении игры. Если Паскаль восхищался тем, что истина одна в Париже и в Тулузе, то тем большее удивление вызывает совершенно аналогичное данному Паскалем решение Гюйгенса. Так окончательно был сформулирован принцип решения возникшей давно задачи о разделении ставки.

Предложения с 10 по 14 содержат применение изложенного ранее к игре в кости. Гюйгенс указал, что при бросании одной кости будет 6 исходов, двух — $6 \cdot 6 = 36$, трех — $36 \cdot 6 = 216$, четырех — $216 \cdot 6 = 1296$. «Так можно продолжать вычисление числа случаев для какого угодно числа костей, умножая на 6 число предшествующих случаев при прибавлении следующей кости» [30, с. 60]. Гюйгенс составил таблицу, содержащую числа способов получения различных сумм очков при бросании трех костей.

В десятом предложении сформирована задача об определении числа бросаний одной кости для получения 6 очков. По существу, ставится задача найти вероятность того, что при n бросаниях хотя бы один раз появится шестерка. Решена она так. Если кость бросить один раз, то будет один шанс получить 6 очков и 5 шансов не получить их. Когда разыгрываемая сумма равна a, стоимость шанса выиграть ее будет $(1 \cdot a + 5 \cdot 0)/6 = a/6$.

Для двух бросаний стоимость шанса выиграть ставку составляет $(a + 5a/6)/6 = 11a/6$, для трех $= 91a/216$, для четырех — $671a/1296$ и т. д.

Все это — математические ожидания, а числа 1/6, 11/36, 91/216 и т. д. — вероятности.

В остальных предложениях имеются варианты задачи о разделении ставки при игре в кости. Есть в них и задача де Мере (конечно, без упоминания о нем) об определении числа бросаний двух костей, чтобы получить две шестерки. Решение ее совпадает с тем, которое было указано раньше: при 25 бросаниях держать пари более выгодно, а 24 бросания таят «легкую невыгоду».

Завершил Гюйгенс книгу пятью задачами читателям. Решения их он опубликовал через 8 лет, в 1665 г.

Таким образом, в своей небольшой книге Гюйгенс ввел понятие математического ожидания [4], которое стало обоб-

щением применявшегося в торговле и промышленной практике среднего арифметического. У Гюйгенса оно выступает как стоимость шанса при безобидной игре. Гюйгенс на интуитивном уровне пользовался вероятностями и свойствами их, выражающимися теоремами сложения вероятностей несовместных событий и умножения вероятностей независимых событий.

У читателя, ознакомившегося с предыдущим содержанием этой книги, может сформироваться суждение, что все в интересующем нас вопросе началось с азартных игр. И в некотором смысле прав был император Юстиниан (483—565), издавший закон «О злоумышленниках, математиках и тому подобных», который гласил: «Совершенно запрещается достойное осуждения искусство математики». Еще более красочно предписание другого кодекса: «Да никто не совещается с гадателем или математиком».

Так вот, такое мнение ошибочно. И автор, исписавший столько бумаги для ознакомления читателя с исследованиями, посвященными игре в кости, еще раз заявляет, что дело с теорией вероятностей обстояло не совсем так.

Азартные игры возникли давно и культивировались во многих странах. Но они не могли возбудить формирования основных вероятностных понятий до тех пор, пока не возникла потребность в них и не сложилась обстановка, способствующая их оформлению.

На формирование вероятностных понятий оказали влияние задачи статистики, страхового дела, обработки результатов наблюдений. Решение вероятностных задач связано с развитием комбинаторики.

И еще одно направление человеческой деятельности стимулировало возникновение и оформление основных понятий теории вероятностей. Оно связано с различного рода наблюдениями, измерениями и оценкой допущенных погрешностей.

Наблюдения широко проводились еще в античном мире. Давно была осмыслена неизбежность ошибок при наблюдениях. Для сглаживания отклонений в практике измерений применялось среднее арифметическое.

В «Диалоге о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой» (1632) Галилей сформулировал следующие заключения: 1) при измерениях ошибки неизбежны, 2) ошибки разного знака равновероятны, 3) с уменьшением ошибки вероятность ее увеличивается, 4) наибольшее количество результатов наблюдений скап-

ливается около истинного значения. Эти выводы Галилея стали основой построенной впоследствии теории ошибок.

Одновременно со становлением вероятностных понятий шло развитие аппарата для решения задач теории вероятностей — комбинаторики. Нахождением чисел сочетаний занимались Н. Тарталья, П. Эригон, А. Таке. Этапом в развитии комбинаторики стал уже упоминавшийся «Трактат об арифметическом треугольнике» Паскаля. Таблицы биномиальных коэффициентов встречались и раньше: у П. Апиана (1495—1552), М. Штифеля (1486—1567), Н. Тартальи. Эригон показал, что $C_n^m = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - m + 1)/1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$.

Эту формулу с помощью полной математической индукции в своем трактате доказал Паскаль. Он обосновал также другие соотношения между числами сочетаний, рассмотрел свойства сочетаний и применил сочетания к решению вероятностных задач.

Таково состояние экспериментальных и научных сведений периода, предваряющего возникновение и становление теории вероятностей, когда трудами Паскаля, Ферма и Гюйгенса были подготовлены к оформлению понятия вероятности, математического ожидания, основные теоремы теории вероятностей, закон больших чисел. Оставалось сделать решительный шаг от экспериментов к науке. Это выпало на долю Я. Бернулли.

Становление

1

Якоб Бернулли и еще два представителя этого знаменитого рода заложили фундамент теории вероятностей.

Род Бернулли — уникальное явление в истории науки и культуры. Бывает, что какое-нибудь дарование передается по наследству из поколения в поколение. Известны музыканты и композиторы Бахи, астрономы Кассини, живописцы и архитекторы крепостные Аргуновы, артисты Садовские. Но, пожалуй, из всех таких семей самыми выдающимися следует считать многочисленных представителей семейства Бернулли.

Род Бернулли дал девять крупных математиков, из них трех великих (Якоб, Иоганн, Даниил). Помимо математиков, среди Бернулли были историки, архитекторы, юристы, искусствоведы и т. д. Не менее тридцати представителей Бернулли обладали выдающимися талантами.

Кафедру математики Базельского университета Бернулли возглавляли 105 лет практически без перерыва. Профессорами того же университета (на разных кафедрах) Бернулли состояли более 200 лет. Кресло академика Парижской Академии наук было занято ими подряд 100 лет. Та же академия выдала десятки премий членам этой семьи. Пятеро математиков Бернулли были членами Петербургской Академии наук, трое работали в Петербурге.

Необыкновенно устойчивая одаренность Бернулли, переходящая из поколения в поколение, проявлялась у них в раннем развитии математического дарования, непреодолимом стремлении к точным наукам, широте и глубине исследований. Бернулли сделали значительный вклад в науку на заре становления и оформления «новой» математики (дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, ряды, вариационное исчисление, теория вероятностей).

Протестантская семья Бернулли жила в Антверпене. Опасаясь религиозных преследований, Бернулли в 1582 г. покинули родные места и обосновались сначала во Франк-

фурте-на-Майне, а в 1622 г. переехали в Базель, где представители рода Бернулли живут и в настоящее время.

Среди многих известных Бернулли некоторые имена, естественно, повторяются, поэтому их различают, как королей, присоединяя к имени соответствующую цифру. Познакомимся с тремя Бернулли, сделавшими наибольший вклад в сокровищницу теории вероятностей.

Якоб I Бернулли родился 27 декабря 1654 г. По желанию отца готовился к званию протестантского священника. Окончил Базельский университет, где изучал философию, богословие и языки. Владел немецким, французским, английским, итальянским, латинским и греческим языками. Испытывая непреодолимое влечение к математике, изучал ее тайком от отца. В 1671 г. получил степень магистра философии. С большим успехом читал проповеди на немецком и французском языках. В то же время пополнял свои знания по математике.

В Швейцарии того времени занятие математикой не обещало никаких выгод, так как соответствующих должностей было мало, и даже университетские преподаватели математики оплачивались крайне скудно. Несмотря на это, Якоб решил посвятить себя целиком математике.

20 августа 1676 г. Якоб отправился в длительное путешествие по Швейцарии, Франции, Италии, из которого возвратился в Базель лишь 20 мая 1680 г. Здесь он опубликовал первую научную работу, посвященную теории комет.

В 1682 г. Якоб отправился в новое путешествие, на этот раз по Нидерландам и Англии. Он познакомился с Х. Гюйгенсом в Амстердаме, с королевским астрономом Д. Флемстидом (1646—1719) в Гринвиче и др. В октябре 1682 г. Якоб возвратился в Базель и больше уже не выезжал никуда, если не считать лечения на курортах.

В 1683 г. он начал читать лекции в Базельском университете по экспериментальной физике. В 1684 г. получил предложение из Гейдельберга занять кафедру математики университета, но отклонил его из-за предстоящей женитьбы и нежелания оставлять родной город.

В октябре 1686 г. оказалась вакантной должность профессора математики в Базельском университете. Сенат университета единодушно выдвинул на эту должность Якоба Бернулли. Вступление в должность состоялось 15 февраля 1687 г.

В том же году Я. Бернулли прочитал в лейпцигском «Журнале ученых» за 1684 г. основополагающую работу

Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». Якоб обнаружил в работе трудные места и письменно обратился к Лейбницу за разъяснением. Лейбниц, находившийся в длительной служебной поездке, получил письмо только через три года, когда надобность в консультации отпала — Якоб совместно с младшим братом Иоганном (1667—1748) овладели дифференциальным и интегральным исчислениями настолько, что вскоре смогли приступить к систематическому развитию метода. Образовавшийся триумвират — Лейбниц, Якоб и Иоганн Бернулли — менее чем за двадцать лет чрезвычайно обогатил анализ бесконечно малых.

Когда Лейбниц вернулся в Ганновер и смог прочитать ждавшее его письмо, Якоб поместил в «Журнале ученых» статью, содержавшую решение задачи Лейбница об изохроне [1]. Уже по этой работе можно судить, как хорошо овладел Якоб новым исчислением. И Лейбниц увидел, что ни в какой консультации Якоб не нуждается.

В 1692 г. сравнительно молодой ученый серьезно заболел. Судя по описанию болезни, можно заключить, что Якоб сильно простудился. Организм не справился с заболеванием, развился туберкулез. К этому прибавились тяжелые переживания, вызванные ссорой с братом в жестоком научном конфликте. Однако плодотворная научная деятельность не прекращалась и слава ученого все росла. В 1699 г. Парижская Академия наук впервые избрала восемь иностранных членов. В их числе наряду с Ньютоном, Лейбницем были и братья Якоб и Иоганн Бернулли. В 1701 г. братья были избраны иностранными членами Берлинской Академии наук.

Основные научные интересы Я. Бернулли были сосредоточены на развитии и приложениях анализа. Освоив метод Лейбница, он применил его к исследованию свойств кривых. Совместно с Иоганном Якоб заложил основы вариационного исчисления. Важную роль здесь сыграло решение задачи о брахистохроне и выдвинутой им изопериметрической задачи [2]. При отыскании сумм одинаковых степеней натуральных чисел Якоб открыл числа, названные впоследствии его именем и встречающиеся в различных вопросах анализа и теории чисел. Он выполнил значительные исследования в области числовых рядов. Пять его мемуаров под общим названием «Арифметические предложения о бесконечных рядах и их конечных суммах»

(1689—1704) были первым руководством по теории числовых рядов.

Якоб Бернулли занимался также физическими задачами, определением центра качания тел, вычислением сопротивления тел различной формы, движущихся в жидкости. Он первый определил упругую линию для защемленной одним концом и нагруженной сосредоточенным весом балки.

Основополагающий вклад сделал Я. Бернулли в теорию вероятностей.

Последние годы жизни Я. Бернулли омрачались «изнурительной лихорадкой, высасывающей здоровье по каплям». Этими словами один из биографов Бернулли выразительно описывал состояние туберкулезного больного. 16 августа 1705 г. Якоб Бернулли скончался. По желанию покойного, на его памятнике высечено изображение спирали с надписью по-латыни: измененная, я возрождаюсь прежней [3].

Собрание сочинений Я. Бернулли вышло в 1744 г. Его «Искусство предположений» издал племянник Николай I в Базеле в 1713 г.; четвертая часть «Искусства предположений», содержащая теорему Бернулли, переведена на русский язык (СПб., 1913).

Николай I Бернулли родился 10 октября 1687 г. Отец, живописец, хотел, чтобы Николай пошел по его стопам. Однако влечение к математике взяло верх, и он стал заниматься под руководством дяди Якоба I. В 1704 г. защитил диссертацию «О бесконечных рядах и их применении к квадратурам площадей и спрямлению кривых» и получил степень магистра. Изучал также юридические науки. В 1710 г. ездил в Париж; путешествовал по Голландии, Бельгии, Франции. В Англию отправился летом 1712 г. В Лондоне познакомился с Ньютоном, Галлеем, Муавром, другими видными учеными. Молодой математик, по-видимому, достойно представлял знаменитую фамилию: Ньютон подарил ему свою книгу — честь, которую он оказывал далеко не всем знакомым. (Книга хранится в Базельской библиотеке.)

В 1716 г. Николай занял вакантное место профессора математики в Падуанском университете. В 1722 г. он переехал в Базель и работал на кафедре логики, а с 1731 г. до самой смерти — на кафедре права. Умер Николай I Бернулли 29 ноября 1759 г. от апоплексического удара.

Николай I — член Берлинской Академии наук (избран 17 мая 1713 г.). Оставил после себя многочисленные рукописи по математике, механике, астрономии.

Большая заслуга Николая I состояла в издании книги Якоба I «Искусство предположений». Он присоединил к ней свою работу «О бесконечных рядах», в большой части базирующуюся на результатах Якоба I.

В 1709 г. Николай выпустил сочинение «О применении искусства предположений к правовым вопросам», где воспользовался исчислением вероятностей в задачах об определении виновности обвиняемого, об объявлении умершими лиц, пропавших без вести, к выборам по жребию и т. д. В те же годы он занимался вычислением пожизненных рент. Многие идеи Николая I Бернулли развил П. де Монмор (1678—1719) во втором издании «Опыта анализа азартных игр» (1713).

В «Комментариях Петербургской Академии наук» (1713) Николай I сформулировал так называемую петербургскую игру [4]. Вот постановка задачи. Два игрока, Петр и Павел, уговариваются сыграть в орла и решку или другую игру, в которой шансы партнеров одинаковы. Если Петр выиграет первую партию, то Павел выплачивает ему два рубля и игра прекращается; если Петр первую партию проигрывает, а выигрывает вторую, то Павел выплачивает ему четыре рубля и игра прекращается... если Петр проиграет $n - 1$ первых партий и выиграет n-ю, то Павел выплачивает ему 2^n рублей и игра прекращается.

Задача состоит в определении ставки Петра, т. е. той суммы, которую он должен до начала игры выплатить Павлу как возмещение за взятые на себя обязательства. Удивительно, что эта ставка является бесконечно большой: чтобы игра была безобидной, Петр должен уплатить Павлу сумму, $2 \cdot 1/2 + 4 \cdot 1/4 + 8 \cdot 1/8 + \ldots + 2^n \cdot 1/2^n = n$, причем n может быть как угодно большим. Это делает игру невозможной. Парадокс заключается в том, что ни один из имеющих опыт игроков на месте Петра не согласится поставить и 100 рублей против обязательств Павла.

Сформулированная задача вызвала много споров, ей посвящены статьи видных математиков. В связи с ней Д. Бернулли (1700—1782) ввел в теорию вероятностей так называемое моральное ожидание (выигрыша), учитывающее имущественное положение игроков, в противовес математическому ожиданию. (Математическим ожиданием в данном случае будет сумма произведений выигрышей на соответствующие вероятности. Оно как раз и оказалось бесконечно большим.)

Интересное рассуждение упоминает О. Курно по по-

воду такой игры Петра и Павла, когда Петр бросает три игральные кости и выплачивает Павлу один франк, если сумма выпавших очков будет больше десяти при первом бросании, два франка — если больше десяти очков выпадет при втором бросании, четыре франка — если при третьем, и т. д., все время удваивая свой проигрыш. Нужно подсчитать, каково математическое ожидание Павла и какую ставку он должен выставить. Курно пишет: «Пуассон привел то простое соображение, что Петр не может уплатить больше того, что имеет, и если бы даже у него было 50 млн. франков — невероятное богатство для частного лица,— то он не мог бы продолжить игру свыше 26-го подбрасывания, так как, проиграй он Павлу в 27-й раз, он должен бы выплатить сумму, равную $2^{26} = 67\,108\,864$ франка, т. е. сумму, превышающую все его состояние. С другой стороны, Павел, зная размер состояния Петра, не согласился бы играть больше 26 раз и со своей стороны пойдет на риск в размере 13 франков. Предполагая же, что Павел не станет ограничивать число игр, хотя он ни в коем случае не сможет получить от Петра больше 50 млн, мы найдем, что математическое значение его ожидания не превысит 13,5 франков» [27, с. 113].

Значительный вклад в теорию вероятностей сделал также Д. Бернулли. Сын Иоганна I, Даниил I Бернулли родился 29 января 1700 г. в Гронингене. Выдающиеся математические способности Даниила обнаруживались очень рано, однако Иоганн категорически возражал против того, чтобы сын стал математиком.

В 1716—1717 гг. Даниил изучал медицину в Базеле, затем учился в Гейдельберге и Страсбурге; в 1723 г., согласно семейной традиции, отправился путешествовать. На длительный срок задержался в Венеции (1723—1725). Здесь занимался практической медициной под руководством известного врача П. А. Микелотти. Не оставлял и математику. Микелотти сам увлекался математикой, поэтому склонность его практиканта к науке, имеющей так мало общего с медициной, нашла у патрона полную поддержку. В 1724 г. Даниил на средства одного из друзей издал результаты своих исследований по математике — «Математические упражнения». Здесь он, в частности, указал значения входящего в уравнение Риккати [5] параметра, при котором это уравнение интегрируется в конечном виде.

К этому времени научная репутация Д. Бернулли настолько укрепилась, что ему предложили пост президента

академии в Генуе. Однако высокая честь не соблазнила молодого ученого: в то время завязалась переписка с Петербургской Академией наук о работе братьев Николая II (1695—1726) и Даниила I в Петербурге, и Даниил отклонил предложение.

Петербургская Академия наук по инициативе Петра I тогда только организовывалась, поэтому для работы в ней приглашались иностранные ученые. Такое приглашение получили и Бернулли. Когда Иоганн I Бернулли запросил президента академии, кого он подразумевает, Николая или Даниила, президент пригласил обоих. По поводу поездки сыновей в Петербург И. Бернулли писал: «Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз обижают и презирают» [21, с. 21—22]. В сентябре 1725 г. братья Николай и Даниил отправились в далекий Петербург.

Ошибочно думать, что жизнь в Петербурге братьев Бернулли, выходцев из обеспеченной базельской семьи, была неким раем. Петербург тех времен не представлял собой еще красавца-города с архитектурными шедеврами. В «Арапе Петра Великого» Пушкин писал: «Во всем городе не было ничего великолепного, кроме Невы, не украшенной еще гранитною рамою...». Ганнибал, вернувшийся из Парижа, увидел мрачную картину: «Обнаженные плотины, каналы без набережной, деревянные мосты повсюду являли недавнюю победу человеческой воли над сопротивлением стихий». Да и петербургский климат был швейцарцам жестковат. Поэтому понятны привилегии, которыми пользовались выдающиеся иностранные ученые, приглашенные для работы в Академии наук. К тому же затраты окупались сторицей: братья Бернулли и прибывший вскоре за ними Л. Эйлер создали великую славу Петербургской Академии в период ее становления.

Пребывание Даниила в Петербурге было омрачено безвременной кончиной брата 29 июля 1726 г., последовавшей всего через девять месяцев после приезда в Петербург. (Николай простудился, купаясь в холодной Неве.)

В 1733 г. Даниил и его младший брат Иоганн II (1710—1790), приехавший в Петербург в 1732 г., покинули северную столицу. В Базеле Даниил занял кафедру ботаники и анатомии. В 1705 г. он стал заведовать кафедрой экспериментальной физики. В общей сложности Даниил возглавлял кафедры Базельского университета 49 лет. С 1776 г. в связи с преклонным возрастом ему при-

ходилось привлекать к руководству кафедрами племянников — Даниила II (1751—1834) и Якоба II (1759—1789). За время работы в университете Даниил два раза был ректором.

17 марта 1782 г. слуга нашел Даниила I Бернулли заснувшим навсегда. По свидетельству современников, этот великий ученый обладал замечательными личностными качествами, располагающими к себе. Он был добр: жертвовал родному университету значительные суммы, помогал нуждающимся, основал гостиницу для бедных студентов, совершающих традиционное путешествие пешком, и т. п.

Научный авторитет Даниила был чрезвычайно высоким. Его избрали в члены многих академий и научных обществ: Берлинскую Академию (1746), Парижскую (1748), Лондонское Королевское общество (1750). Он состоял также почетным членом Петербургской Академии наук, членом Туринской Академии, Института в Болонье и т. д.

Даниил I десять раз получал премии Парижской Академии наук (только Эйлер превзошел его в количестве премий, полученных от этой академии). Первую премию он получил еще в 1725 г. Несколько премий он разделил с отцом, Эйлером, Маклореном (1698—1746), Иоганном II и др.

В изданиях Петербургской Академии наук Даниил I Бернулли опубликовал 47 работ. Круг его научных интересов и охваченных им в работах проблем математики и механики достаточно широк. Прежде всего, он основал современную гидродинамику. Он предложил метод численного решения алгебраических уравнений, который в форме, приданной Лагранжем, сохранился до нашего времени. Даниил I нашел предельное значение переменной $(1 + 1/n)^n$, занимался исследованием дифференциального уравнения Риккати, линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами, рассмотрел частный случай функции Бесселя, в одном из писем Эйлеру поставил задачу о колебаниях пластины. Он рассмотрел задачу о колебаниях струны, представил общее решение дифференциального уравнения колебаний струны в виде тригонометрического ряда, нашел несколько разложений функций в тригонометрические ряды. В связи с введением тригонометрических рядов возникла проблема исследования их на сходимость. Развернулась полемика, в которой Даниил I принял деятельное участие.

Д. Бернулли исследовал поперечные колебания упругих стержней, вывел дифференциальное уравнение колебаний, нашел общее решение его, рассмотрел граничные условия, соответствующие свободному, опертому и защемленному концам стержня. Полученные результаты ученый сравнил с опытом. Даниил I Бернулли разрабатывал кинетическую теорию газов. Работы Д. Бернулли дали значительный импульс развитию теории вероятностей. Он занимался отысканием закона распределения вероятностей ошибок наблюдений, ввел понятие морального ожидания. Выдающимся событием в развитии теории вероятностей было применение Даниилом Бернулли методов анализа бесконечно малых к решению вероятностных проблем. Благодаря этому стали доступными исследованию и решению задачи, не поддающиеся аппарату комбинаторики. В нескольких работах он применил теорию вероятностей к определению длительности человеческой жизни, смертности от оспы и действия прививок, средней продолжительности браков.

2

Над «Искусством предположений» Якоб Бернулли работал более 20 лет, а издал ее в 1713 г. Николай I Бернулли (через 8 лет после смерти автора).

Николай Бернулли также занимался теорией вероятностей и в 1709 г. защитил диссертацию на степень лиценциата прав «О применении искусства предположений к правовым вопросам». Ознакомимся с ней. Необходимо только подчеркнуть, что она выполнена под влиянием «Искусства предположений» Я. Бернулли.

В начале первой главы диссертации, называемой «Об искусстве предположений вообще», Н. Бернулли сформулировал задачи «искусства предположений» и ввел понятие вероятности. То и другое он сделал так же, как и Я. Бернулли. Вот слова Н. Бернулли: «Искусство это есть искусство оценивать с наибольшей возможной точностью вероятности событий с целью получения возможности в своих суждениях и поступках всегда выбирать то или следовать тому, что кажется лучшим, более благоприятным или более благоразумным» [6].

Вероятность Н. Бернулли определяет так: «Вероятность есть степень достоверности и отличается от нее как часть от целого». Достоверность он принимает за единицу. Тогда вероятность будет выражаться в долях достовер-

ности, т. е. единицы. Если достоверность состоит «из пяти возможностей или частей, из числа которых три благоприятствуют тому, чтобы некоторое событие произошло в будущем, а остальные препятствуют этому, про такое событие мы скажем, что оно имеет 3/5 достоверности. Таким образом, более вероятным по сравнению с другим называется то событие, которое обладает большей частью достоверности».

Н. Бернулли вводит положительно вероятные события: это те события, вероятности которых «заметно превосходят половину достоверности». Если же вероятность события составляет меньше половины достоверности, то такое событие называется сомнительным. «То, что обладает 1/5 достоверности, вероятнее того, что обладает 1/10 ее, но при этом ни то, ни другое не является положительно вероятным».

Н. Бернулли достаточно подробно обсуждает идею математического ожидания. Он называет его «степенью вероятности», «оценкой ожидания». «Следует умножить,— пишет Н. Бернулли,— то, что выпадет в отдельных случаях, на число случаев, в которых устанавливается выпадение каждого из них, а сумму произведений разделить на общее число всех случаев; частное же покажет, что вероятно случится, или определит оценку ожидания, или степень искомой вероятности ... Правило это тождественно с тем, с помощью которого обыкновенно отыскивается среднее арифметическое из нескольких данных величин, а также и с тем правилом смешивания, на которое счел уместным сослаться мой дядя».

В качестве пояснения сказанного приводится пример из рукописи Я. Бернулли: «Если 3 кружки вина ценой по 13 смешиваются с 2 кружками ценой по 8, то после перемножения 3 на 13 и 2 на 8 получится общая цена всех кружек — 55, что даст путем деления на число всех кружек, т. е. на 5, среднюю цену одной кружки смеси, равную 11. Такова же должна быть, согласно правилу, и оценка величины ожидания чего-либо, что будет иметь 3 случая по 13 и 2 по 8».

Существенно заметить, что Н. Бернулли ввел аналогию математического ожидания с координатой центра тяжести системы материальных точек на прямой. Она вошла в учебники и применяется в настоящее время на лекциях по теории вероятностей.

Выдвинутую аналогию Н. Бернулли завершил так: «В целях соблюдения такого же равновесия в сомнитель-

ных и темных делах наши юристы обычно придерживаются середины».

Вторая глава книги — «О способе установления вероятности человеческой жизни» — посвящена определению вероятности дожития человека до определенного возраста. Здесь Н. Бернулли пользовался таблицами Д. Граунта (1620—1674).

В главах III—VI обсуждаются вопросы: кого из отсутствующих по неизвестным причинам следует считать умершим; покупки пожизненных доходов; применения различных законов; страхования жизни и имущества.

Глава VII озаглавлена «Об играх, пари и лотереях». Н. Бернулли считает, что игры должны быть справедливыми и объясняет смысл этого. В качестве примера он приводит генуэзскую лотерею, которую считает несправедливой, и призывает власти не разрешать ее, а купцов — возмещать «лишнее, полученное ими сверх причитающегося по праву».

В главе IX ведется речь об определении достоверности свидетельских показаний. Дается подсчет «невиновности». Она будет $(2/3)^n$, где n — число улик. Например, при наличии 10 улик «невиновность» составит $(2/3)^{10} = 1024/59049$. Вероятность настолько мала, «что было бы почти морально достоверным совершение преступления».

В чем значимость рассмотренной работы Н. Бернулли? Очевидно, в том, что он выделил «искусство предположений», т. е. теорию вероятностей, в отдельную отрасль науки; он сделал шаг вперед в развитии понятия математического ожидания и его приложений при решении задач. Но тот, кто хоть немного знаком с теорией вероятностей, примет как ребячество попытки Н. Бернулли (как увидим дальше, и не только его) применить теорию вероятностей там, где она не работает, не может и не должна работать.

Н. Бернулли получил и некоторые другие результаты, связанные с законом распределения вероятностей случайных величин. О них он сообщил в письме от 23 января 1713 г. Монмору, который опубликовал его во втором издании своего «Опыта анализа азартных игр».

3

Рукопись книги Я. Бернулли «Искусство предположений» в 1705 г. приобрели издатели братья Турнизиус. Они намеревались просить И. Бернулли закончить и подготовить к изданию работу брата. Но Иоганн в это время был

сильно занят, как и всю жизнь, и не смог ничего сделать. Тогда выбор пал на Н. Бернулли.

Николай сначала не решался браться за столь сложную задачу, мотивируя отказ своей неподготовленностью. «Я был слишком молод,— писал он,— и лишен той большой опытности, которую нужно иметь, чтобы исследовать подобные вопросы. Я не считал себя в силах сделать это и полагал, что я не только не выполню ожиданий читателя, но, дав только вульгарное и тривиальное применение, нанесу ущерб всей остальной части работы».

И все же Н. Бернулли сумел подготовить к изданию начатый дядей труд. Он написал предисловие к книге, в котором указал: «Автор ставил своей целью показать исключительную пользу, которую может оказать в вопросах гражданской жизни до сего времени мало разработанная часть математики, имеющая своим предметом измерение вероятности».

Далее он рассказал о структуре и содержании книги и отметил, что Я. Бернулли намеревался в четвертой части дать применение искусства предположений к «вопросам гражданским, экономическим и моральным». Но свое намерение не осуществил.

Предисловие завершается так: «Мы надеемся, во всяком случае, что общие принципы, изложенные автором в пяти главах последней части, будут полезны читателю для решения частных вопросов. Вот что мы считали нужным сказать о самом трактате».

Структура «Искусства предположений» такова. В первой части — «Сочинение о возможных расчетах в азартной игре Христиана Гюйгенса с замечаниями Якова Бернулли» — автор приводит трактат Гюйгенса, к каждому из 14 предложений которого дает примечания, поясняя их, снабжая доказательствами и примерами.

Первые три предложения относительно того, что могут получить два или три партнера, имеющие равные шансы, Бернулли считает основными в искусстве предположений. Он пишет: «Автор этого трактата излагает ... в этом и двух следующих предложениях основной принцип искусства предположений. Так как очень важно, чтобы он был хорошо понят, я попытаюсь доказать его при помощи исчислений более обычных и более доступных всем, исходя исключительно из той аксиомы или определения, что каждый должен ожидать или предполагает ожидать столько, сколько он неминуемо получит» [53, с. 5]

Сказанное поясняется примером: некто спрятал в од-

ной руке 3 монеты (a монет), а в другой — 7 (b монет). Двое указывают на разные руки и получают находящееся в них. Вместе будет 10, т. е. $a + b$ монет. «Каждый из нас имеет одинаковое право на то, что мы вместе ожидаем; отсюда следует, что предмет общего ожидания должен быть разделен на две равные части, и каждому из нас будет причитаться ровно половина того, что мы ожидаем вместе, т. е. 5 (или $(a + b)/2$)». Когда в одной руке будет a, а в другой нет ничего, ожидание составит $a/2$.

В первых трех предложениях Гюйгенса речь идет о математическом ожидании. Бернулли этот термин не употребляет, а поясняет, как необходимо его понимать. «Слово «ожидание» здесь не должно пониматься в его обычном смысле, согласно которому «ожидать» или «надеяться» относится к событию наиболее благоприятному, хотя может произойти наихудшее для нас. Нужно понимать под этим словом ту надежду, которую мы имеем на получение лучшего, уменьшенную страхом худшего. Так что стоимость нашего ожидания всегда означает нечто среднее между лучшим, на что мы надеемся, и худшим, чего мы боимся. Таким образом следует его понимать и далее».

Человеку, знакомому со строгим и лаконичным языком современной математики, по правде сказать, трудно ориентироваться в таком пояснении. Может быть, сам чувствуя неудовлетворенность, Бернулли иллюстрирует свою мысль многочисленными примерами применения математического ожидания в задачах с различными условиями.

Примеры Бернулли завершает аналогией правила для нахождения «стоимости ожидания» с «правилом товарищества» в арифметике, когда отыскивается цена смеси, «состоящей из определенных количеств различных вещей с различной ценой». Затем следует пример о смеси вин, упомянутый Н. Бернулли.

Начиная с предложения IV, Гюйгенс решал задачи о справедливом разделении ставки. Я. Бернулли указывает, что при этом необходимо обращать внимание только на недостающие партии для каждого игрока. Оригинальной задачей он иллюстрирует невозможность применения теоремы сложения вероятностей несовместных событий, когда события совместны [7].

И все остальные предложения Гюйгенса Бернулли обобщает, иллюстрирует задачами. В примечании к двенадцатому предложению Гюйгенса Бернулли получил

результат, вошедший во все учебники по теории вероятностей: это — формула Бернулли. По ней отыскивается вероятность того, что некоторое событие при n испытаниях Бернулли произойдет k раз. Она имеет вид

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Здесь p — вероятность появления события при одном испытании; $q = 1 - p$ — вероятность того, что это событие при одном испытании не произойдет (вероятность появления противоположного события).

В конце первой части Бернулли поместил решение четырех из пяти задач, предложенных Гюйгенсом (пятую он решил в третьей части).

Вторая часть книги Бернулли — «Учение о перестановках и сочетаниях». В ней излагается комбинаторика. Необходимо иметь в виду, что до того времени, когда математики ввели в теорию вероятностей понятие случайной величины, в связи с чем появилась возможность пользоваться в ней методами анализа бесконечно малых, комбинаторика давала единственный аппарат для решения вероятностных задач. И еще: с развитием комбинаторики формировалось понятие вероятности. Вероятность выступала как отношение исходов опыта, а для подсчета числа их применялись формулы комбинаторики. (Ими пользуются и сейчас при непосредственном подсчете вероятностей.)

Бернулли упоминает математиков, занимающихся комбинаторикой: Лейбница, Валлиса, Схоотена, де Бесси и др. И здесь он излагает свои результаты, полученные при изучении свойств размещений, перестановок и сочетаний.

В этой части книги Бернулли рассматривает так называемые фигурные числа [8], что привело его к задаче суммирования натуральных степеней натуральных чисел. Такая задача решалась и до Бернулли, но он получил общее выражение для указанных сумм. Входящие в представление их коэффициенты Эйлер назвал числами Бернулли. Они так и называются в математике.

Третья часть книги называется «Применение учения о сочетании к различным случайным играм и играм в кости». В ней решены 24 задачи, некоторые из них — в общем виде.

Даже из такого краткого описания первых трех частей книги Я. Бернулли можно сделать вывод, что она представляет собой значительный вклад в математику.

И все же основное содержание книги заключено в четвертой части. Придавая ей огромное значение, Петербургская Академия наук предприняла перевод ее на русский язык и выпустила в свет отдельной книгой в 1913 г. в связи с 200-летием со времени опубликования этого сочинения Я. Бернулли.

Четвертая часть книги носит название «Применение предыдущего учения к гражданским, моральным и экономическим вопросам». Оно говорит о том, что Я. Бернулли намеревался применить теорию вероятностей к указанным сферам человеческой деятельности. Об этом же писал в предисловии и Н. Бернулли. Но осуществить свое намерение автор не сумел. Книга обрывается после доказательства теоремы, представляющей простейшую форму закона больших чисел [9].

Глава I — «Некоторые предварительные понятия о достоверности, вероятности, необходимости и случайности вещей» — служит вводной. Я. Бернулли пишет: «Достоверность какой-либо вещи рассматривается объективно и сама по себе и обозначает не что иное, как действительное ее существование в настоящем или будущем; или субъективно, в зависимости от нас, и заключается в степени нашего знания об этом существовании. Все, что под Солнцем существует или возникает,— прошедшее, настоящее или будущее — само по себе и объективно всегда имеет высшую степень достоверности. Относительно событий настоящего или прошедшего это ясно; ибо тем самым, что они существуют или существовали, они не могут быть несуществующими или несуществовавшими. Но нельзя сомневаться и относительно событий будущего, которые, равным образом, если и не по некоторой неизбежной необходимости, то в силу божественного предвидения или предопределения не могут не осуществиться в будущем; ибо если не наверно случится то, чему определено случиться, то непонятно, как может остаться непоколебленной хвала всеведению и всемогуществу величайшего Творца. Каким образом, однако, эта достоверность будущего может быть согласована со случайностью или свободой вторичных причин — об этом пусть спорят другие; мы же не будем касаться чуждого нашим целям» [2, с. 1].

Здесь уместно сделать одно замечание. Основатели теории вероятностей понимали, что эта область математики имеет прямое соприкосновение с теорией познания, связана с категориями случайности и необходимости. Всем известен продолжавшийся долгие годы спор А. Эйнштей-

на с Н. Бором о характере физических законов, суть которой можно свести к разрешению вопроса: играл ли бог в кости?

Я. Бернулли стоял на позиции детерминизма и отрицал объективную случайность. И понятна его попытка прибегнуть к авторитету «величайшего Творца» при объяснении того, что должно случиться; заслуживает внимания и последняя фраза цитаты: богословский спор не может быть предметом науки, и не только потому, что чужд поставленным автором целям.

Вероятность определяется Я. Бернулли как степень достоверности «и отличается от нее, как часть от целого. Именно, если полная и безусловная достоверность, означаемая нами буквой α или 1, будет, для примера, предположена состоящей из пяти вероятностей, как бы частей, из которых три благоприятствуют существованию или осуществлению какого-либо события, остальные же не благоприятствуют, то будет говориться, что это событие имеет $3\alpha/5$ или 3/5 достоверности».

Из нескольких событий Я. Бернулли называет более вероятным то, которое имеет большую степень достоверности; возможным то, что имеет хоть какую-либо степень достоверности. Он вводит также понятие нравственно достоверного и называет нравственно достоверным то, «чего вероятность почти равна полной достоверности, так что разница неощутима».

Необходимое Я. Бернулли определяет как то, «что не может не быть в настоящем, будущем или прошедшем...» Различается необходимость физическая (огонь должен жечь; треугольник должен иметь три угла, сумма которых равна двум прямым, и т. д.), гипотетическая (если я знаю, что Петр пишет, то он и в самом деле должен писать), необходимость условия или соглашания (если игроки в кости условились, что выигрывает тот, кто выбросит шесть очков, то считается выигравшим игрок, выбросивший шесть очков).

Случайное определяется так: «*Случайное* (как *свободное*, зависящее от произвола разумного создания, так и *случайное*, зависящее от судьбы или случая) есть то, что может быть или не быть в настоящем, прошедшем или будущем,— понятно, вследствие сил скрытых, не ближайших. Ибо и случайность не всегда исключает всякую необходимость до причин вторичных». Я. Бернулли связывает случайное с недостаточностью наших знаний. Это положение он иллюстрирует примерами: выпадение опре-

деленного числа очков на игральной кости, будущая погода — случайны, затмения — необходимы, хотя первые два «явления из своих ближайших причин следуют с не меньшей необходимостью, чем затмения — из движения светил». Суть дела в том, что «предполагаемое данным для определения последующих действий и таковое на самом деле в природе нам недостаточно известно. И если бы даже это было известно, то недостаточно развиты математические и физические знания, чтобы, исходя из данных причин, подвергнуть такие явления вычислению, подобно тому как из совершенных принципов астрономии могут быть предвычисляемы и предсказываемы затмения» [2, с. 4]. И сами затмения, когда астрономия не была развита в достаточной степени, «должны были причисляться к случайным».

«Так что,— резюмирует Я. Бернулли,— случайность главным образом зависит от нашего знания, поскольку мы не видим никакого противоречия к небытию события теперь или в будущем, хотя здесь и теперь, в силу ближайшей причины, нам неизвестной, оно или осуществляется с необходимостью, или должно осуществляться» [2, с. 4].

Далее Я. Бернулли определяет счастье и несчастье. «*Счастьем* или *несчастьем* называется не все, что нам приносит благо или зло, но только то, что с большей или, по крайней мере, с равной вероятностью могло бы таковых не принести. И потому счастье или несчастье тем больше, чем менее было вероятным случившееся зло» [2, с. 4]. Исключительно счастливым он считает нашедшего при раскопках земли клад, потому что и при тысячах раскопок такое не случается. «Если двадцать дезертиров,— пишет он дальше,— из которых один в пример другим должен быть казнен через повешение, бросают жребий, кому остаться в живых, то собственно счастливыми не называются те девятнадцать, которым выпал более благоприятный жребий, но тот двадцатый несчастнейшим, которому выпал черный жребий. Равным образом не должен называться счастливым твой друг, который ушел невредимым из сражения, где погибла малая часть сражавшихся, если, может быть, ты не сочтешь нужным так называть его вследствие особенности блага, состоящего в сохранении жизни» [2, с. 5].

В главе II речь идет о знании и предположении, об искусстве предположений, об основаниях для предположений, определяются задачи теории вероятностей, а так-

же формулируются правила, назначение которых, очевидно, — служить делу судейской практики.

«Относительно того, что твердо известно и не подлежит сомнению, мы говорим, что *знаем* или *понимаем*, относительно всего прочего, — что только догадываемся или предполагаем.

Делать о какой-либо вещи предположения все равно что измерять ее вероятность. Поэтому искусство предположений (Ars conjectandi) у нас определяется как искусство возможно точнее измерять вероятности вещей затем, чтобы в наших суждениях или действиях мы могли всегда выбирать или следовать тому, что будет найдено лучшим, более удовлетворительным, спокойным и разумным. В этом единственно заключается вся мудрость философа и благоразумие политика» [2, с. 6].

Вероятности оцениваются не только по числу, но и по весу доводов, под которым понимается «сила» доводов. Доводы рассматриваются внутренние, вытекающие из «общих соображений причины, действия лица, связи, признака или иных обстоятельств, которые кажутся имеющими какое-либо отношение к доказываемому предмету», а также внешние, «извлекаемые из авторитета и действия людей».

Основную часть главы II составляют общие правила или аксиомы, которыми следует руководствоваться в практике «и которые в общежитии всегда соблюдаются более разумными». Правила таковы.

«1) *Догадкам не место в тех вещах, где можно достигнуть полной достоверности*...

2) *Недостаточно взвешивать один или другой довод; но нужно добыть все, которые могут дойти до нашего сведения и которые покажутся годными в каком-либо отношении для доказательства предположения*...

3) *Следует не только рассматривать доводы, приводящие к утверждению, но и все те, которые могут привести к противоположному заключению, дабы после должного обсуждения тех и других стало ясно, которые перевешивают*...

4) *Для суждения о вещах общих достаточны доводы отдаленные и общие; но для суждения о частных вещах следует присоединять также доводы более близкие и специальные, если только такие имеются*...

5) *В обстоятельствах неясных и сомнительных наши действия должны приостанавливаться, пока не прольется больший свет; но если необходимость действия не терпит*

отлагательства, из двух исходов нужно всегда избирать тот, который кажется наиболее подходящим, безопасным, разумным или надежным, хотя бы ни один таковым на деле не был...

6) *Что в некотором случае полезно, но ни в каком не вредно, следует предпочитать тому, что никогда не приносит ни пользы, ни вреда...*

7) *Не следует оценивать поступки людей по их результатам...*

8) *В суждениях наших следует остерегаться, чтобы не приписывать вещам более, чем следует, и не считать самим, а равно и не навязывать другим, за безусловно достоверное нечто такое, что только вероятнее другого. Ибо необходимо, чтобы придаваемая вещам вера сообразовалась со степенью достоверности, которую имеет каждая вещь, и была в том же отношении меньше, в каком меньше сама достоверность ее...*

9) *Однако, так как только в редких случаях можно достичь полной достоверности, то необходимость и обычай требуют, чтобы нравственно лишь достоверное считалось безусловно достоверным»* [2, с. 7—11].

Правила Я. Бернулли поясняет примерами из жизни. Обсуждаются вопросы: кто проживет дольше из двух человек различных возрастов; который из трех вышедших из порта кораблей мог погибнуть в результате кораблекрушения; можно ли считать умершим человека, уехавшего и долго отсутствующего, и др.

Содержание первых двух глав части IV сочинения Я. Бернулли показывает, что он поставил перед собой цель дать приложения теории к юридическим вопросам, вопросам страхования, статистики населения; им сформулированы общие правила или аксиомы, для принятия решения, введены и классифицированы доводы обоснования предположений. Но как получить количественные оценки, которыми только и должна заниматься математическая теория?

В главе III Я. Бернулли осуществляет первый шаг, позволяющий произвести стыковку анализа новых явлений с анализом азартных игр. Он указывает следующие различия доводов: одни обязательно существуют, но не обязательно доказывают; другие не обязательно существуют, но обязательно доказывают; третьи не обязательно существуют и не обязательно доказывают. Кроме того, он вводит доводы чистые и смешанные. Чистые в одних случаях доказывают нечто, в других — нет. Смешанные в од-

них случаях доказывают что-то, в других — противоположное.

Вслед за поясняющими примерами Я. Бернулли пишет: «Из сказанного до сих пор ясно, что сила доказательности, свойственная какому-либо доводу, зависит от числа случаев, при которых он может существовать или не существовать, доказывать или не доказывать или даже доказывать противное. Потому и степень достоверности или вероятности, обусловленная этим доводом может быть выведена из тех случаев совершенно так же, как вычисляется судьба игроков в играх, зависящих от случая» [2, с. 14].

Затем Я. Бернулли производит подсчет того, какую часть достоверности (вероятности, по Я. Бернулли) доказывают доводы в различных комбинациях.

Формулы Я. Бернулли можно легко получить (теперь!), если воспользоваться известными нам теоремами теории вероятностей.

Фундаментальные достижения Я. Бернулли в теории вероятностей состоят в разработке вероятностной модели — схемы Бернулли, постулировании наравне с вероятностями a priori вероятностей a posteriori и установлении эквивалентности их, что, по существу, и дает закон больших чисел в форме Бернулли, и в строгом доказательстве закона больших чисел.

Схема Бернулли — одна из основных математических моделей; применяется она при описании независимых повторных испытаний.

Испытанием в теории вероятностей называют осуществление некоторой совокупности условий S; событие A — результат испытания (опыта). Рассмотрим несколько повторных испытаний, в результате каждого из которых событие A может произойти (появиться) с определенной вероятностью. Если вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события A.

Одинаковые независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с постоянной вероятностью p, называются испытаниями Бернулли. Примерами испытаний Бернулли могут быть: многократное бросание симметричной игральной кости, бросание симметричной монеты, извлечение из урны одинаковых по форме разноцветных шаров с возвращением извлеченного шара в урну и т. д.

Вероятность появления события A в серии из n испыта-

ний k раз ($k \leqslant n$), как уже упоминалось, вычисляется по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где C_n^k — число сочетаний из n по k: $C_n^k = n!/k!(n-k)!$; p — вероятность появления события A в каждом испытании; q — вероятность противоположного события (непоявления события A), причем $p + q = 1$.

Правая часть формулы Бернулли представляет собой любой член разложения бинома $(p + q)^n$; этим он и воспользовался при доказательстве основной теоремы.

В главе IV Я. Бернулли делает второй шаг в расширении применимости разработанного аппарата к явлениям, отличным от азартных игр. Он пишет о том, что в предыдущей главе показано, как по числу доводов можно вычислить «доказательные силы» их и соответствующие вероятности. Нужно знать числа случаев и насколько одни из них могут «легче встретиться, чем другие». Но появляются новые трудности, «так как только крайне редко это возможно сделать и почти нигде не удается, кроме игр, зависящих от случая, которые первые изобретатели, постаравшись сделать безобидными, устроили так, чтобы были совершенно известны числа случаев, влекущих выигрыш или проигрыш, а сами случаи могли бы встретиться одинаково легко. В большинстве же других явлений, зависящих от действий сил естественных или от свободной воли людей, не имеет места ни то, ни другое» [2, с. 21].

Известно число случаев при игре в кости, при извлечении из урны белых и черных билетиков (с возвращением в урну и последующим перемешиванием). Но ничего нельзя сказать о числе случаев, связанном с числом болезней, «которые во всяком возрасте поражают бесчисленное множество частей человеческого тела и могут нам причинить смерть; и насколько одна болезнь легче погубит человека, чем другая: например, чума, чем водобоязнь, водобоязнь, чем лихорадка, чтобы отсюда можно было составить предположение о жизни или смерти в будущем» [2, с. 22]. То же самое относится и к предсказанию погоды или выигрыша в играх, связанных с интеллектуальными или физическими качествами игроков.

Но выход найден. Я. Бернулли пишет: «Так как это и подобное зависит от причин совершенно скрытых и, сверх того, вследствие бесконечного разнообразия их сочетаний, всегда ускользающих от нашего познания, то было бы совершенно безумно желать что-либо узнать таким путем. Но здесь нам открывается другая дорога для достижения искомого. И что не дано вывести a priori, то по крайней

мере можно получить a posteriori, т. е. из многократного наблюдения результатов в подобных примерах. Потому что должно предполагать, что некоторое явление в стольких же случаях может случиться или не случиться, в скольких при подобном же положении вещей раньше оно было отмечено случившимся или неслучившимся» [2, с. 22—23].

Этот способ, отмечает Я. Бернулли, не нов и не необычен. О нем писал Кардано. Мало того, «даже самый ограниченный человек» без «предварительного обучения (что очень удивительно), знает», что увеличение числа опытов дает лучшие результаты. И хотя отмеченный факт известен всем, доказательство его никем не было предпринято.

Но, продолжает Я. Бернулли, он считал бы малой заслугой только доказательство широко известного факта. Необходимо двинуться дальше, рассмотреть то, о чем даже никто и не думал: определить, будет ли при увеличении числа опытов вероятность расти или она никогда не может превзойти некоторую «степень достоверности», т. е., как пишет Я. Бернулли, задача имеет асимптоту. Он предлагает пример: в урне «без твоего ведома скрыты три тысячи белых и две тысячи черных камешков», т. е. отношение белых к черным равно 3 : 2. Камешки извлекаются один за другим, причем каждый раз возвращаются в урну и тщательно перемешиваются; при этом число появлений белых и черных камешков фиксируется.

Можно ли проделать опыт столько раз, «чтобы в десять, сто, тысячу и т. д. раз было вероятнее, что числа появлений белых и черных будут находиться в том же отношении 3 к 2, в каком находятся самые числа камешков, чем в каком-либо другом отношении, от него отличном. Если бы этого не случилось, то, признаюсь, следовало бы усомниться в нашей попытке определять числа случаев из опытов. Но если это достигается и таким путем, наконец, получается нравственная достоверность (а что это в самом деле так, я покажу в следующей главе), то находим числа случаев a posteriori почти с тою же точностью, как если бы они были известны нам a priori».

Разумеется, отношение «числа случаев», определяемое опытом, следует понимать не точно, а приближенно, «в двух границах, которые можно взять сколь угодно тесными», например в случае с камешками 301/200 и 299/200 или 3001/2000 и 2999/2000.

Сказанное означает, что, приняв любую вероятность, «можно сделать более вероятным, что найденное из мно-

гих наблюдений отношение будет заключено в этих пределах полуторного отношения, а не вне их» [2, с. 24—25].

Решение поставленной задачи, доказательство «главного предложения», содержится в главе V «Искусства предположений». Формулировка теоремы для тех, кто знаком с теорией вероятностей, кажется необычной.

«Пусть число благоприятных случаев относится к числу неблагоприятных точно или приближенно, как r к s, или к числу всех случаев — как r к $r + s$ или r к t, каковое отношение заключается в пределах $(r + 1)/t$ и $(r - 1)/t$. Требуется доказать, что можно взять столько опытов, чтобы в какое угодно данное число раз (c раз) было вероятнее, что число благоприятных наблюдений попадает в эти пределы, а не вне их, т. е. что отношение числа благоприятных наблюдений к числу всех будет не более, чем $(r + 1)/t$ и не менее, чем $(r - 1)/t$» [2, с. 37].

Современная формулировка теоремы Я. Бернулли такова: если производится n независимых испытаний в постоянных условиях, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p, то вероятность того, что относительная частота m/n появления событий удовлетворяет неравенству $| m/n - p | < \varepsilon$, становится сколь угодно близкой к 1 при достаточно большом числе испытаний.

Я. Бернулли доказал теорему средствами «чистой математики», предпослав ей пять лемм, устанавливающих необходимые для доказательства теоремы свойства членов разложения бинома и воспользовавшись упомянутой ранее формулой для $P_n(k)$.

Нет смысла приводить здесь доказательство Я. Бернулли: оно громоздко и заняло бы много места. Кроме того, это доказательство чрезвычайно упрощается, если воспользоваться другой формой закона больших чисел — теоремой Чебышева, о которой речь пойдет впереди.

Вероятность выполнения неравенства $| m/n - p | < \varepsilon$ просто оценивается с помощью неравенства Чебышева

$$P(| m/n - p | < \varepsilon) \geqslant 1 - D_x/\varepsilon^2,$$

где D_x — дисперсия случайной величины X.

Впоследствии теорему Я. Бернулли С. Д. Пуассон назвал законом больших чисел. Закон больших чисел определяет связь между относительной частотой появления события в массовых испытаниях и его вероятностью и имеет важное значение в теории вероятностей. Обычно на практике вероятность изучаемого явления заранее неизвестна; о ней можно судить по относительной частоте, наблюдае-

мой при многократных повторениях опыта. На законе больших чисел основаны применения теории вероятностей. Кроме того, в нем заключено значительное методологическое и философское содержание.

Пуассон при изучении вопросов теории стрельб расширил применимость закона больших чисел на случаи, когда вероятность появления события меняется от опыта к опыту.

Закон больших чисел впоследствии проверялся экспериментально: опыты с многократным бросанием монеты проводили Ж. Л. де Бюффон, О. де Морган, У. С. Джевонс, Л. А. Кетле, К. Пирсон, В. И. Романовский и др.

Закон больших чисел относится к классу предельных теорем теории вероятностей. Теорема Я. Бернулли положила начало исследованиям, связанным с предельными теоремами, которые составляли основное содержание теории вероятностей в течение длительного периода.

Не прошло и 50 лет после опубликования «Искусства предположений» Я. Бернулли, как А. де Муавр открыл теорему (о ней речь пойдет впереди), которая, будучи обобщенной П. С. Лапласом (1749—1827), вместе с законом больших чисел стала главным достижением теории вероятностей за два века после первоначальных шагов ее в середине XVII столетия. Методы теории вероятностей нашли применение в статистике, страховом деле, артиллерии, астрономии и т. д., но все же ее развитие значительно отставало от других разделов математики.

Во многих работах по теории вероятностей допускались принципиальные ошибки. Особенно это наблюдалось в применении ее к оценке свидетельских показаний, правильности судейских решений и другим вопросам общественных отношений. Этим темам посвящалось большое количество работ, отводилось значительное место в учебниках.

Становление теории вероятностей на прочную математическую основу оставалось делом будущего.

Первые шаги

1

Теория вероятностей от Я. Бернулли к Лапласу развивалась трудами П. де Монмора, А. де Муавра [1], Д. Бернулли, Ж. Л. Д'Аламбера, Л. Эйлера, Т. Бейеса. Наряду с вероятностями как отношениями исходов опыта рассматривались геометрические вероятности (Бюффон).

Любитель математики де Монмор выпустил в свет двумя изданиями «Опыт анализа азартных игр». Книга во втором издании состоит из четырех частей. Первая содержит комбинаторику, вторая посвящена разбору игр в карты, третья —разбору игр в кости, в четвертой решаются различные задачи, в том числе пять задач Гюйгенса.

Монмор был знаком с «Искусством предположений» по сообщению Б. де Фонтенеля в «Истории Академии» за 1705 г. и Ж. Сорена в «Журнале ученых Франции» за 1706 г., но думал, что книга не будет опубликована.

В предисловии Монмор пишет, что поскольку в новой области, которой является искусство предположений, можно получить важные результаты, он решил заняться ею, чтобы восполнить выдающуюся работу Я. Бернулли. Он намеревался воспользоваться теорией вероятностей при определении «суждений и поведения людей в практической жизни». Монмор утверждал, что Я. Бернулли в четвертой части своей книги применял разработанные им методы «к решению различных гражданских, нравственных и политических вопросов». Он и сам пытался это сделать, но столкнулся с затруднениями и вынужден был «отложить эту работу до другого времени или предоставить славу ее свершения другому, более ... искусному лицу...». Монмор упоминает работы Петти, Галлея, Гюйгенса, переписку Паскаля и Ферма. Предисловие он заключает словами: «В этом трактате я в первую очередь имел в виду удовольствие математиков, а не пользу игроков; по нашему мнению, тот, кто теряет время на игры, вполне заслуживает терять в них свои деньги» [33, с. 103].



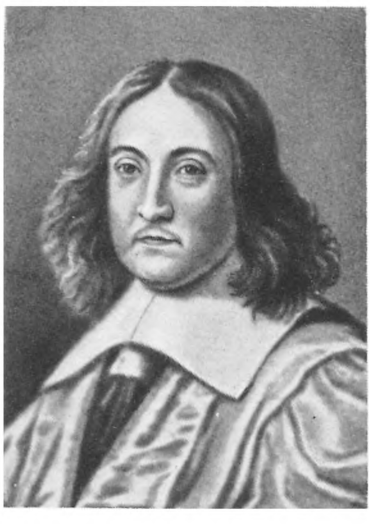
Н. ТАРТАЛЬЯ
(1500—1557)



Д. КАРДАНО
(1501—1576)



Б. ПАСКАЛЬ
(1623—1662)



П. ФЕРМА
(1601—1665)



Х. ГЮЙГЕНС
(1629—1695)



Я. БЕРНУЛЛИ
(1654—1705)



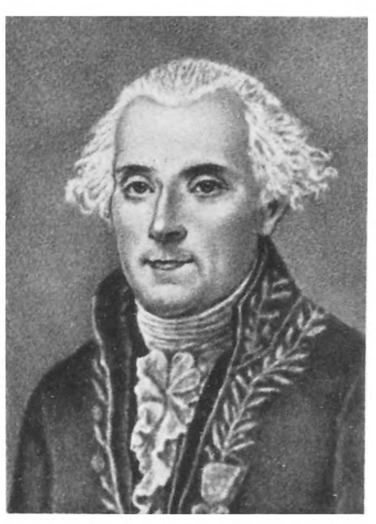
А. МУАВР
(1667—1754)



Д. БЕРНУЛЛИ
(1700—1782)



П. С. ЛАПЛАС
(1749—1827)



С. Д. ПУАССОН
(1781—1840)



К. Ф. ГАУСС
(1777—1855)



О. Л. КОШИ
(1789—1857)



П. Л. ЧЕБЫШЕВ
(1821—1894)



А. А. МАРКОВ
(1856—1922)



А. М. ЛЯПУНОВ
(1857—1918)



А. Н. КОЛМОГОРОВ
(1903—1987)

В первой части «Опыта» говорится об арифметическом треугольнике Паскаля, разложении бинома $(a+b)^n$, решаются задачи по комбинаторике. Во второй и третьей частях решаются задачи об азартных играх, в частности — о разделе ставки. Четвертая часть также содержит различные задачи. Здесь поставлена задача о продолжении игры до полного разорения одного из двух игроков, если до игры они имели n и m монет соответственно, вероятность выигрыша в каждой партии обоих игроков одинакова, и ставят они в каждой партии по одной монете.

Монмор подробно разбирает переписку Паскаля и Ферма и приводит полностью письмо Паскаля от 24 августа 1654 г. Затем идет переписка Монмора с Н. Бернулли, в которой была сформулирована задача о «петербургской игре».

Книга Монмора не могла служить этапом в развитии теории вероятностей, поскольку мало содержала нового; все же она привлекла внимание математиков.

Более существенную роль в теории вероятностей сыграли работы А. де Муавра.

Абрахам де Муавр, сын врача, родился в 1667 г. во Франции. Он был гугенотом. В 1688 г. Муавр покинул родину, поселился в Лондоне, где и прожил всю остальную жизнь.

В Лондоне Муавр самостоятельно закончил математическое образование, стал заниматься математикой и получил известность. В 1697 г. его избрали членом Королевского общества, в 1754 г.— иностранным членом Парижской Академии наук. Но высокое признание заслуг Муавра не обеспечивало его средствами на жизнь; он зарабатывал частными уроками и консультациями.

Муавр пользовался расположением И. Ньютона, участвовал в подготовке латинского издания его «Оптики». Ньютон зачастую пытающихся получить у него консультацию направлял к Муавру.

В вышедшей в 1865 г. «Истории математической теории вероятностей» А. Тодхантер писал: «В длинном списке лиц, облагороженных гением... и нашедших убежище в Англии, трудно назвать кого-либо, кто бы принес больше чести своей новой родине, чем Муавр» [62, с. 135—136].

Здесь необходимо еще раз подчеркнуть следующее: до открытия предельных теорем теория вероятностей как наука не существовала. Ее методы могли применяться к ограниченному кругу задач, в основном к задачам, связанным с азартными играми.

Результаты по теории вероятностей изложены Муавром в сочинениях «Учение о случаях, или метод вычисления вероятностей при игре» (1718, 1738, 1756) и «Аналитические этюды о рядах и квадратурах» (1730). Первое из них представляет собой переработку большой статьи «О мере случая» (1711). Ко второму позднее присоединены два дополнения. Второе дополнение (1733) под названием «Метод аппроксимации суммы членов разложенного в ряд бинома $(a + b)^n$ с выводом некоторых практических правил для оценки согласия, которую следует придать экспериментам» вошло в позднейшие издания «Учения о случаях».

Муавр интересовался различными вопросами теории вероятностей: он рассматривал задачи, связанные с теоремой Бернулли, таблицами смертности, продолжительностью игры. Как результат изучения таблиц смертности, составленных Галлеем, Муавр предложил простейшую форму закона смертности для людей в возрасте от 22 до 86 лет. Это $y = 86 - x$, где x — данный возраст, 86 — предел долголетия.

Муавр достаточно четко определил независимые и зависимые события, ввел понятие условной вероятности, сформулировал теорему умножения вероятностей. Он занимался также задачей о разорении игрока и получил формулы вероятности того, что выиграет игрок A или игрок B и математического ожидания числа необходимых для завершения игры партий. Эта задача была поставлена Гюйгенсом, ее решали, кроме Муавра, Н. и Я. Бернулли, Монмор.

Введенная в науку Я. Бернулли схема повторных испытаний привлекла к себе внимание исследователей. Но возникли значительные трудности. Дело в том, что при большом числе испытаний формула Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ для определения вероятности того, что некоторое событие произойдет в серии из n испытаний k раз, приводит к громоздким вычислениям. Это связано не только со степенями p^k и q^{n-k}, но и с вычислением числа сочетаний $C_n^k = n!/k!\,(n-k)!$. Если, например, $n = 50$, $k = 30$, то входящие в формулу для C_n^k величины будут $50! = 30414093 \cdot 10^{57}$, $30! = 26525286 \cdot 10^{25}$, $20! = 24329020 \cdot 10^{11}$. Естественно, что ученые стали искать предельные законы.

Во введении к одной из работ Муавр указал, что при решении вероятностных задач приходится вычислять ве-

роятности вида $P_n(k)$, а это для больших значений n затруднительно. Он стал искать асимптотическую формулу и добился полного успеха.

Трудность состояла в оценке величины $n!$ при больших n. Муавр получил асимптотическую формулу $n! = B\sqrt{n}\,e^{-n}n^n$, где B — постоянное число. Он нашел $B \approx 2{,}5074$. Но у него было желание связать эту константу с известными в математике. Муавр обратился за консультацией к Д. Стирлингу (1692—1770), который получил $B = \sqrt{2\pi} \approx 2{,}506628...$ Следовательно, $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,e^{-n}n^n$. Эту формулу называют формулой Стирлинга.

Муавр находился под влиянием философии Ньютона, «установившего порядок во Вселенной». Такой же порядок он отыскивал на Земле, в демографии. Это и привело его к открытию важных теорем.

В настоящее время в теории вероятностей имя Муавра носят две теоремы (теоремы Муавра—Лапласа) — локальная и интегральная [2]. Обе они относятся к классу предельных теорем теории вероятностей. В предельных теоремах речь идет о соответствии между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин и случайных событий при большом числе испытаний, а также о предельных законах распределения случайных величин.

Вместе с продвижением вперед по интересующей нас теме появляются новые понятия, термины. Необходимо их пояснить. Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять какое-либо из возможных значений ее. Случайные величины бывают дискретные и непрерывные. Случайная величина называется дискретной, если число ее возможных значений конечно или бесконечно, но такое, что их можно перенумеровать. Непрерывной случайной величиной называется такая, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал. Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между возможными значениями ее и вероятностями того, что она примет такие значения. Одним из законов распределения непрерывной случайной величины служит функция распределения вероятностей, указывающая вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее некоторого x, находящегося на интервале ее изменения.

Числовыми характеристиками случайных величин называются отыскиваемые по их распределениям числа, дающие общее представление об этих распределениях. Числовой характеристикой будет, например, упоминаемое ранее математическое ожидание.

Воспользовавшись формулой Стирлинга, Муавр установил, что в случае $p = q = 1/2$ средний член разложения бинома $(1/2 + 1/2)^n$ асимптотически будет $1/\sqrt{2\pi npq}$, а впоследствии доказал локальную теорему при $p \neq 1/2$. Взятые им значения $p = q = 1/2$ объясняются тем, что такие вероятности рассматриваются в простейших задачах демографии.

От локальной теоремы Муавр осуществил переход к интегральной. Они составили основной вклад в теорию вероятностей после трудов Я. Бернулли.

Локальную и интегральную теоремы на любые значения p, отличные от нуля и единицы, распространил Лаплас.

Локальная теорема Муавра—Лапласа теперь записывается в виде

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

где

$$x = (k - np)/\sqrt{npq},$$

а интегральная

$$P\left(a \leqslant \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2}\, dz,$$

где μ — число появлений события при n испытаниях.

Лаплас не указывал своих предшественников, поэтому вклад Муавра в теорию вероятностей оставался практически неизвестным до конца XIX в. Этому способствовало и то, что работы Муавра были написаны на незначительно распространенном в континентальной Европе английском языке. Кроме того, Муавр пользовался устаревшей символикой, и читателей отпугивало решение большого количества задач, иногда — без подробных объяснений.

Были у Муавра еще значительные достижения в математике. Широко распространена формула Муавра для возвышения в степень комплексного числа в тригонометрической форме

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

При решении задач об азартных играх Муавр разработал теорию возвратных последовательностей, нашедшую применение и развитие в трудах Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа, П. С. Лапласа [3].

2

Те, кому доводилось плавать по рекам средней полосы на байдарке, с чувством непрестанного удивления наблюдали, как постепенно образуется полноводная река из небольших ручьев и ручейков, впадающих на всем протяжении в нее. Так любое общественное явление образуется из слагающих. Такова и наука.

Как уже было упомянуто, теорию вероятностей пополняли развивающаяся параллельно ей статистика народонаселения, которую называли политической арифметикой, и формирующаяся теория ошибок (при обработке результатов измерений).

Подтверждение близости теории вероятностей и математической статистики видно из того, что наравне с вероятностью как отношением благоприятствующих событию исходов опыта к общему числу исходов применялись статистические вероятности, вероятности как относительные частоты. Задача определения отклонения наблюдаемой относительной частоты от заранее предсказанной вероятности служила основой развития теории вероятностей. И теорема Я. Бернулли использовалась для подтверждения проводившихся демографических расчетов. Таким образом, у теории вероятностей появилась практически важная область приложений.

Заслуживающей внимания работой по статистике было сочинение врача и математика Д. Арбутнота (1667—1735) «Довод в пользу божественного провидения, взятый из постоянной закономерности, наблюдаемой в рождении (младенцев) обоих полов» (1712). Арбутнот установил, что в течение 82 лет в Лондоне число рождающихся мальчиков превышало число девочек; этот факт, будто бы, говорит о том, что равновероятности рождений нет, что в нем выступает воля провидения. Такие же утверждения высказывались и позднее.

Сочинение пастора И. П. Зюссмильха (1707—1767) «Божественный порядок в изменениях человеческого рода, доказываемый рождениями, смертью и размножением» (1741) стало фундаментом статистики народонаселения. Во всех статистических закономерностях, установленных ранее и широко исследуемых автором, Зюссмильх видел

проявление божественного порядка. Он считал, что благополучие государств зависит от состояния народов, поэтому рекомендовал правителям заботиться о населении. Он выступил против войн, нищеты, роскоши как факторов, нарушающих божественный порядок. Позднее Зюссмильх высказался за освобождение крестьян.

Второе издание сочинения Зюссмильха, расширенное в 3—4 раза по сравнению с первым, вышло в 1671—1672 гг. Одна из глав — «О скорости умножения и периоде удвоения человеческого рода» написана при участии Эйлера.

Эйлер выполнил несколько исследований по статистике народонаселения и математическим основам страхования жизни. В работе «Общие исследования о смертности и умножении человеческого рода» (1767) он рассмотрел вопросы вероятности выживания и стоимости пожизненных рент, привел приближенную формулу для определения возрастания населения с течением времени.

Эйлер посвятил несколько работ распространенным в то время лотереям: определял вероятности различных исходов, появления подряд нескольких номеров, отыскивал обоснованную цену билетов и т. д. Были у Эйлера и сочинения, посвященные страховому делу, организации пенсионных касс, обеспечению уходящих в отставку лиц. Как видим, Эйлера интересовала прикладная сторона теории вероятностей.

Начала теории ошибок наблюдений сформулированы Галилеем. Но еще раньше его Тихо Браге полагал, что измерения несут в себе ошибки и точность будет выше, если произвести несколько измерений и взять среднее арифметическое.

После Ньютона, разработавшего систему мироздания, возникла задача определения фигуры Земли. При решении ее создавались методы математической обработки результатов наблюдений и теория ошибок. Естественно, что к развитию соответствующих методов приводила и практика картографирования местности.

Разработкой математической теории ошибок измерений занимались Р. Коутс, Т. Симпсон, Д. Бернулли, И. Ламберт.

В 1722 г. была опубликована статья Коутса «Оценка погрешностей в прикладной математике с помощью изменений плоского и сферического треугольника», в которой автор рекомендовал при обработке результатов измерений пользоваться средним арифметическим. Он указал, как получать среднее взвешенное, когда результаты изме-

рений наблюдались не по одному разу, а с «весами». Коутс установил механическую аналогию: среднее арифметическое интерпретируется центром тяжести системы точек на прямой. Он полагал, что ошибки распределены равномерно на интервале $(-a, a)$.

Симпсон считал, что малые ошибки встречаются чаще, чем большие, и ограничены по абсолютной величине. Он ввел треугольное распределение ошибок, плотность которого равна нулю на интервалах от $-\infty$ до $-a$ и от a до ∞. Для такого распределения он доказал, что среднее арифметическое представляет измеряемую величину более точно, чем отдельные измерения. Этот результат Симпсон считал очень важным и опубликовал его в отдельной работе «О преимуществах выбора среднего из некоторого числа наблюдений в практической астрономии» (1755).

Ламберт в работах 1760 и 1765 гг. указал цели теории ошибок, дал оценки точности наблюдений, сформулировал правила подбора параметров прямых и кривых линий по наблюдаемым значениям.

Теорию ошибок развивали впоследствии Д. Бернулли, Р. Бошкович (1711—1787), Ж. Л. Лагранж (1736—1813), Л. Эйлер, П. С. Лаплас, А. М. Лежандр (1752—1833), К. Ф. Гаусс (1777—1855). О работах Бернулли, Лапласа, Лежандра, Гаусса будет сказано дальше.

Американский математик Р. Эдрейн, Лежандр и Гаусс разработали метод наименьших квадратов, что составило в теории ошибок наблюдений целую эпоху.

Вопросам теории ошибок, в том числе методу наименьших квадратов, уделяли внимание П. Л. Чебышев и А. А. Марков.

3

Теперь пришла пора рассказать о работах по теории вероятностей третьего представителя знаменитого рода Бернулли — Даниила.

Хотя из Бернулли, занимавшихся теорией вероятностей, имя свое в этой науке оставил только Якоб, работы Даниила оказали значительное влияние на ее развитие. Лаплас в «Опыте философии теории вероятностей» неоднократно упоминал Д. Бернулли и включил введенное им понятие морального ожидания в число десяти общих принципов теории вероятностей.

За время с 1738 по 1778 г. Д. Бернулли опубликовал семь мемуаров по теории вероятностей, из которых шесть — в Петербурге. В мемуаре «Опыт новой теории

меры случая» (1738), посвященном разбору упомянутой ранее «петербургской игры», Д. Бернулли вводит моральное ожидание. Предварительно он формулирует «основное правило» для вычисления математического ожидания: «Значение ожидаемой величины получается путем умножения значений отдельных ожидаемых величин на число случаев, в которых они могут появиться, и последующего деления суммы произведений на сумму всех случаев, при этом требуется, чтобы рассматривались те случаи, которые являются равновозможными между собой» [33, с. 109].

Далее Бернулли поясняет: «Так как нет никакого основания представлять одному ожидающему больше, чем другому, то следует признать за каждым из них в отдельности право на одинаковую долю, при этом не принимаются во внимание никакие соображения, учитывающие положение отдельных лиц, оцениваются же тщательно только соображения, имеющие отношение к условиям вероятности».

Бернулли считает, что здесь таится несправедливость, и для подтверждения этого приводит примеры. Положим, что неимущий может одинаково вероятно получить 20 тысяч дукатов или не получить ничего. Имеет ли смысл ему продать свой шанс за 9 тысяч, а не за 10? Бернулли отвечает утвердительно. Богатый же человек так поступил бы в ущерб своим интересам. Отсюда следует: «Очевидно, невозможно рекомендовать всем людям мерить шанс одной и той же мерою, а следовательно, нельзя применять и правило § 1».

Для устранения недостатков математического ожидания Д. Бернулли предлагает учитывать «выгоду», а не «цену» и пишет: «Ценность должна быть определена не по цене вещи, а по той выгоде, которую каждый извлек бы из нее. Цена определяется по вещи и является одинаковой для всех, выгода же зависит от личных условий. Так, несомненно, что получение 1000 дукатов имеет бо́льшее значение для бедняка, чем для богатого, хотя цена их для каждого является одинаковой».

Бернулли допускает, что чье-то состояние увеличивается малыми приращениями; при этом предположении «каждый маленький выигрыш всегда приносит выгоду, обратно пропорциональную общему итогу богатства». Под общим итогом богатства понимается все, что обеспечивает жизнь человека. Следовательно, моральное значение выигрыша зависит не только от его величины и соответст-

вующей вероятности, но и от имущественного состояния игрока.

Сделав предварительные высказывания, Бернулли вводит понятие морального ожидания и применяет его к анализу «петербургской игры». Ее условия таковы. Играют двое — Петр и Павел. Петр бросает монету до первого выпадения герба. Если герб выпадает при k-м бросании ($k = 1, 2, 3 \ldots$), то Павел выплачивает Петру 2^k рублей. Чтобы игра была безобидной, Петр должен уплатить Павлу сумму, равную математическому ожиданию выигрыша. Но оно равно

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \ldots,$$

т. е. бесконечно. Это делает игру невозможной.

Д. Бернулли положил, что произвольному выигрышу dx соответствует выгода dy, обратно пропорциональная имуществу x игрока. Он составил дифференциальное уравнение

$$dy = bdx/x, \text{ где } b > 0,\ x > 0.$$

Решим его, учитывая, что при начальном капитале $x = \alpha$ будет $y = 0$. Получим

$$y = b \ln x + C.$$

Найдем значение константы C по начальному условию для чего подставим его в общее решение уравнения:

$$0 = b \ln \alpha + C, \quad C = -b \ln \alpha.$$

Частное решение уравнения имеет вид

$$y = b \ln x - b \ln \alpha, \quad y = f(x) = b \ln x/\alpha.$$

Значимость всего этого состоит в том, что Д. Бернулли впервые ввел в теорию вероятностей методы математического анализа. Далее, найденную функцию выгоды $f(x)$ он ввел вместо x в выражение математического ожидания. И положил его равным

$$\frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}.$$

Здесь $m_1, m_2, \ldots$ — значения выигрышей. Такое «исправ ленное» математическое ожидание стали называть мораль ным ожиданием [4]. Д. Бернулли рекомендовал пользо ваться им при анализе азартных игр и в коммерции. Мож

но установить, что моральное ожидание выигрыша меньше его математического ожидания.

В азартных играх с нулевым математическим ожиданием моральное ожидание проигрыша превышает моральное ожидание выигрыша, в этом Д. Бернулли видел «отчетливое указание природы» на то, чтобы уклоняться от азартных игр. Более категорично об играх высказывался Лаплас. Он предостерегал от пагубного воздействия азартных игр.

Понятие морального ожидания в том же мемуаре Д. Бернулли применил к такой задаче: некто имеет 4000 дукатов наличными и 8000 дукатов в товарах, находящихся в дальних странах. Предположим, что из десяти кораблей, предназначенных для вывоза этих товаров, один тонет. Как выгоднее перевозить эти товары?

Бернулли подсчитал моральные ожидания приобретения от перевозимых товаров, когда все товары перевозятся на одном корабле и на двух кораблях; он установил что во втором случае моральное ожидание больше и сделал вывод, что увеличение числа кораблей увеличивает моральное ожидание приобретения, т. е. выгоду.

Введение морального ожидания в практику различных исследований поддерживал известный французский естествоиспытатель Ж. Л. Бюффон. В «Опыте моральной арифметики» он писал: «Скупой человек похож на математика, тот и другой ценят деньги по внутреннему их достоинству; рассудительный человек, однако, не разбирает, какова их условная ценность, а видит только выгоды, которые может извлечь из них. Талер, отложенный бедным для внесения законной повинности, и талер, дополняющий мешки ростовщика, в глазах скупого и математика имеют одинаковую ценность; первый присвоит себе каждый из них с равным наслаждением, второй будет считать их двумя равными единицами; между тем человек рассудительный оценит в золотую монету талер бедного и в грош талер ростовщика» [5].

Бюффон предложил свои формулы для подсчета «нравственной выгоды».

Позднее В. Я. Буняковский (1804—1889) считал, что моральное ожидание поможет исследовать «нравственное состояние страны». Он ввел некоторую функцию $\theta(x)$ — меру морального ожидания и на основании ее сделал вывод, что любые игры невыгодны. О французской лотерее Буняковский писал: «Может ли что быть безнравственнее подобного учреждения? Такую лотерею по справед-

ливости можно было бы назвать налогом на народное невежество» [6, с. 93].

Идею морального ожидания впоследствии воспроизводили Лаплас, С. Д. Пуассон, С. Ф. Лакруа. Но Л. Бертран в курсе «Исчисление вероятностей» заметил, что «... эту теорию изучали, ей обучали, ее излагали в истинно знаменитых книгах. Успех на этом и окончился, ею фактически не занимались и из нее не смогли сделать никакого употребления» [44, с. 466]. И это верно: о моральном ожидании сейчас знают разве лишь историки математики, да и то не все, а те, кто занимается теорией вероятностей.

Справедливости ради, отметим, что в современной теории информации пользуются функционалом, заданным на вероятностном распределении с помощью логарифмической функции и измеряющим прирост информации. В дискретном случае таким функционалом служит энтропия.

Несомненным и принципиально важным достижением Д. Бернулли было введение в теорию вероятностей методов математического анализа. Этому посвящена «Попытка применения алгоритма бесконечно малых в теории вероятностей», вышедшая в 1768 г., хотя Бернулли применял их еще в статье 1760 г. об оспопрививании, опубликованной в 1766 г.

Существо вопроса состояло в том, что решение вероятностных задач с применением аппарата комбинаторики приводило к громоздким вычислениям; Бернулли предложил решать задачи с помощью дифференциального исчисления, считая единицу «бесконечно малой» в сравнении с большими числами, встречающимися в задачах. Такой подход позволял получать приближенные формулы для наиболее существенных членов точных формул, иными словами — асимптотические выражения ответов при больших значениях входящих в задачи параметров.

Теории в статье нет, идея поясняется на примерах. Упоминается задача, связанная с выниманием записок из урны. Бернулли пишет: «... для совершения этого дела с удобством могут быть применены исчисления бесконечно малых, если только каждое изменение можно считать как бы за бесконечно малое, а это возможно до тех пор, пока число записок, остающихся в урне, весьма велико, ибо тогда единица может приниматься как бы за бесконечно малую; это основано на той арифметической гипотезе бесконечных, которой пользовались до открытия дифференциального и интегрального исчисления. Впрочем,

я понимаю, что этот отвлеченно поставленный вопрос нуждается в дальнейшем объяснении и потому перехожу к иллюстрации сути дела примерами, причем сперва пользуюсь обычным анализом, а от него перехожу к применению алгоритма бесконечных» [44, с. 465—466].

Далее формулируется конкретная задача: в урне имеется n пар записок, каждая пара занумерована одним и тем же номером. Из урны извлекается несколько записок так, что остается в ней r записок. Необходимо найти математическое ожидание x числа оставшихся пар с одинаковыми номерами. Задача решается сначала алгебраически, а затем — с помощью дифференциального исчисления. Не различая математического ожидания записок и количества их (эта ошибка встречается и в других мемуарах Д. Бернулли по теории вероятностей), первым способом Бернулли находит

$$x = r(r-1)/(4n-2),$$

что при больших r и n дает асимптотическое выражение

$$x = r^2/4n.$$

Затем Бернулли рассуждает так: при уменьшении r на единицу извлекается записка, либо входящая, либо не входящая в пару; в первом случае будет $dx = dr$, а во втором $dx = 0$. Вероятность первого случая считается равной $2x/r$. Тогда получается дифференциальное уравнение

$$dx = 2xdr/r,$$

решение которого при условии, что $r = 2n$, когда $x = n$, будет

$$x = r^2/4n.$$

Идеи применения дифференциального исчисления к задачам теории вероятностей Бернулли развивал еще в двух мемуарах, опубликованных в Петербурге в 1770 г. В «Аналитических исследованиях новой проблемы предположений» он решил следующую задачу: в двух урнах имеется по n шаров, в одной — белые, в другой — черные. Из каждой урны в другую перекладывается одновременно один шар, и операция повторяется r раз. Требуется найти математическое ожидание числа белых шаров в первой урне. Бернулли решает задачу также двумя методами. Сначала комбинаторным методом он получает

$$x = \frac{r}{n}\left[1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^r\right],$$

что при больших n и r приводит к

$$x = \frac{n}{2}(1 + e^{-2r/n}).$$

Затем составляет дифференциальное уравнение так же, как и в предыдущей работе: предполагается бесконечная малость единицы по сравнению с участвующими в задаче числами, поэтому $dx = -1$, когда из первой урны вынут белый шар с вероятностью x/n, и $dx = dr = 1$, когда вынут черный с вероятностью $(n - x)/n$. Тогда

$$dx/dr = -x/n + (n - x)/n.$$

Интегрирование уравнения с начальным условием $x = n$ при $r = 0$ дает тот же асимптотический результат.

Мемуар Д. Бернулли «О средней продолжительности браков при всяком возрасте супругов и о других смежных вопросах» (1768) является примером применения вероятностных идей к статистике народонаселения. В нем Бернулли провел аналогию между решенной ранее задачей об извлечении парных записок и законами прекращения браков в связи со смертью одного из супругов; рассмотрел некоторые дополнительные вопросы, например случаи неравномерной смертности мужчин и женщин (аналог — извлечение из урны непарных записок, разрушение пар).

Другой мемуар по статистике народонаселения — «Опыт нового анализа смертности, вызванной оспой, и преимущество предотвращающей ее инокуляции» (1766) — содержит исследование влияния прививок оспы на продолжительность жизни. Дело в том, что открытая Э. Дженнером профилактическая прививка оспы встречала в народе противодействие. Бернулли поставил цель математически показать пользу прививок. Не располагая статистическими данными о смертности от оспы, он предположил, что опасность заболеть оспой и погибнуть от нее одинакова для всех возрастов, и на основании проведенных предварительных расчетов построил таблицы смертности инокулированного населения. Он пришел к выводу, что прививки увеличивают среднюю продолжительность жизни на 3 года 2 месяца, и это ставит вне всякого сомнения их пользу. Как говорит Лаплас, «... остается только преодолеть естественную косность народа, с которой приходится бороться постоянно, даже в тех случаях, когда дело касается его самых дорогих интересов» [28, с. 140].

Заметим, что впоследствии Д'Аламбер подверг резкой критике мемуар Бернулли «Опыт нового анализа смертности...». Он оспаривал исходные предпосылки Бернулли и утверждал, что вывод о пользе прививок нельзя делать только на основании удлинения среднего срока жизни, хотя безусловно поддерживал оспопрививание.

Классическая проблема статистики народонаселения — соотношение рождаемости мальчиков и девочек — была исследована Бернулли в мемуаре, вышедшем в Петербурге в 1771 г. В процессе решения задачи он применил аналог интегральной теоремы Муавра—Лапласа. В мемуаре опубликована первая таблица нормального распределения для $e^{-\mu^2/100}$ при $\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30$.

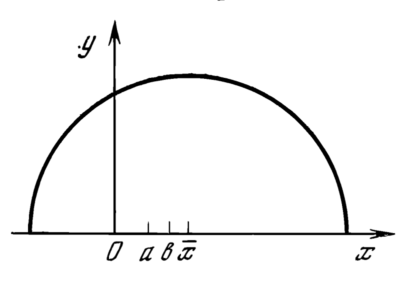


Рис. 2

В последующей работе по теории вероятностей — «Наиболее вероятное значение среди нескольких расходящихся между собой наблюдений и устанавливаемое отсюда наиболее близкое к истине заключение» (1778) — Д. Бернулли предложил в качестве кривой распределения случайных ошибок полуокружность, радиус которой служит пределом значений их. Бернулли критикует выбор среднего арифметического из серии наблюдений, соответствующего случаю равной вероятности ошибок, выдвигает для кривой распределения некоторые требования и предлагает в качестве ее полуокружность (рис. 2):

$$y = \sqrt{r^2 - (x - \bar{x})^2}, \quad y \geqslant 0, \ \bar{x} > 0.$$

К отысканию абсциссы $\bar{x}$ кривой распределения он применил принцип максимального правдоподобия, сохранившийся в математической статистике до сих пор. Если результаты измерения $0, a, b, \ldots$ ($a > 0, b > 0, \ldots$), то составляется функция правдоподобия

$$(r^2 - x^2)\,[r^2 - (\bar{x} - a)^2]\,[r^2 - (\bar{x} - b)^2]\ \ldots$$

и находится значение $\bar{x}$ из требования ее максимума. Решение уравнения правдоподобия оказалось громоздким: при двух наблюдениях получается кубическое уравнение, при трех — уравнение пятой степени с 20 членами. Именно это неудобство вызвало критику Эйлера, поместившего в том же выпуске «Комментариев Петербургской Акаде-

мии наук» «Замечания к предыдущей работе», где предложил другой метод, приводящий всегда к кубическому уравнению.

В письме Н. Фуссу от 18 марта 1778 г. Д. Бернулли выразил свое удовлетворение тем, что его мемуар напечатан в «Комментариях» и что Эйлер заинтересовался им.

Полуокружность как кривая распределения в теории вероятностей не укрепилась, но считается, что идеи Д. Бернулли оказали влияние на Гаусса, выдвинувшего в 1809 г. принцип наименьших квадратов для обработки результатов наблюдений.

Отметим следующее. Известно, что площадь под кривой распределения равна единице. В случае введенном Д. Бернулли, она будет $\pi r^2/2$, и кривая распределения существует только при одном значении $r = \sqrt{2/\pi}$. Видимо, Д. Бернулли на это внимания не обратил.

4

Кто изучает теорию вероятностей, тот знает формулу Байеса. Она определяет вероятность события (гипотезы) после того, как другое событие произошло (апостериорную вероятность). Лаплас включил ее в число основных принципов теории вероятностей.

Томас Байес родился в Лондоне в 1702 г. в семье члена Королевского общества, пастора. Предполагается, что домашним учителем его был Муавр. Байес получил духовное звание и стал пастором. В 1720 г. он переехал в Танбридж, находившийся в 50 км от Лондона, где функционировала религиозная секта. В 1742 г. Байеса избрали в Королевское общество.

Байес прожил в Танбридже до своей кончины 17 апреля 1761 г.

В 1731 г. Байес написал трактат «Божественная доброта или попытка доказать, что принцип конечного божественного поведения и управления является счастьем его создателя».

В 1763 г. член Королевского общества Р. Прайс (1723—1791) опубликовал работу «Опыт решения задачи по теории вероятностей покойного достопочтенного мистера Байеса, члена Королевского общества; сообщено в письме к Джону Кентону, магистру искусств, члену Королевского общества». Она под названием «Очерки к решению проблемы доктрины шансов Томаса Байеса» была напечатана в 1958 г. Вместе с ней помещено письмо Прайса Кентону от 10 ноября 1763 г. В нем Прайс высоко

оценивает исследование Байеса, излагает содержание и просит Кентона зачитать его в Королевском обществе, что и было сделано 23 декабря 1763 г.

Байес формулирует задачу: «Дано число раз, когда неизвестное событие наступило и не наступило. Отыскивается шанс, что вероятность его наступления при одном-единственном испытании лежит между какими-нибудь двумя степенями вероятности» [55, с. 298].

Вслед за этим Байес приводит определения:

«1. Несколько событий являются несовместимыми, если наступление одного из них исключает наступление остальных.

2. События называются исключающими друг друга, если одно из них должно наступить, но оба одновременно наступить не могут.

3. Говорят, что событие не состоялось, если оно не наступает, или если наступает исключающее событие.

4. Говорят, что событие определено, если оно наступило или не наступило.

5. Вероятность какого-нибудь события есть отношение значения, которое дается ожиданию, связанному с наступлением события, и значения ожидаемой в этом случае прибыли.

6. Под шансом я понимают то же самое, что и под вероятностью.

7. События являются независимыми, если наступление одного не уменьшает и не увеличивает вероятности остальных» [55, с. 298—299].

Заметим, что некоторые определения созвучны современным.

По словам Прайса, Байес включил все это по той причине, что не знал источников, которые можно было бы рекомендовать читателю.

Здесь же Байес доказывает теоремы сложения и умножения вероятностей. Вот как формулируется теорема сложения: «П р е д л о ж е н и е 1. Если несколько событий являются несовместимыми, то вероятность того, что наступит одно или другое из них, равна сумме вероятностей каждого из них».

А вот доказательство этого предложения: «Предположим, что существуют три таких события, что, если наступит одно из них, я получаю сумму N, а также, что вероятность первого, второго и третьего суть a/N, b/N, c/N, тогда (согласно определению вероятности) значение моего ожидания первого события будет a, второго — b и

третьего — c. Но сумма моих ожиданий всех трех есть в этом случае ожидание получить сумму N, если наступит одно из трех событий. Поэтому (по определению 5) вероятность одного или другого из этих событий

$$(a+b+c)/N \quad \text{или} \quad a/N + b/N + c/N.$$

Это есть сумма вероятностей каждого из них» [55, с. 299].

Байес доказывает теорему умножения вероятностей и ряд других закономерностей, связанные с понятием вероятности. В частности, рассматривает вероятность наступления нескольких независимых событий и получает формулу Бернулли.

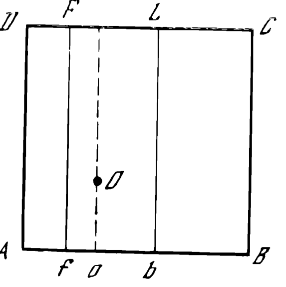


Рис. 3

Основное содержание трактата Байеса составляет второй раздел. В нем решается задача: найти вероятность того, что вероятность события при одном испытании лежит между двумя заданными границами.

Байес рассматривает следующую схему: на квадратную доску $ABCD$ (рис. 3) бросается шар. Предполагается, что он обязательно должен где-то остановиться и что вероятность остановки его в любой точке фигуры одинакова. На прямой AB произвольным образом берутся точки f и b, через которые проводятся прямые fF и bL, параллельные AD.

Доказывается лемма: «Вероятность того, что точка o (точка остановки шара.— *В. Н.*) будет находиться между двумя какими-нибудь точками линии AB, есть отношение расстояния между двумя точками ко всей линии AB» [55, с. 302]. Это означает, что вероятность остановки шара в любой точке прямоугольника $bfFL$ равна fb/AB (что то же самое — отношению площадей прямоугольника и квадрата).

Далее задача усложняется: при условии равномерного распределения вероятности Байес утверждает, что, учитывая число появлений и непоявлений события (остановки шара) в n испытаниях, можно сделать предположение о вероятности этого события и установить вероятность высказанного предположения. Он доказывает соответствующую теорему, формулирует правила для вычисления входящих в формулы площадей.

Прайс дополнил правила Байеса и рассмотрел приме-

ры. Он снабдил работу Байеса приложением, в котором сделал разъяснение о применимости правил. Он утверждал, что ими можно пользоваться для изучения природы.

Заметим, что формулы Байеса в его работах по теории вероятностей нет. Ее ввел Лаплас в «Мемуаре о приближениях для формул, которые являются функциями весьма больших чисел» (1786). Он же и назвал ее формулой Байеса.

5

Создатель 44-томной «Естественной истории», 36 томов которой написаны им самим, Ж. Л. Бюффон интересовался многими вопросами теории вероятностей. С его именем связывают введение в науку понятия геометрической вероятности. Она теперь определяется так.

Предположим, что на плоскости задается отрезок AB длины L и на нем произвольным образом располагается отрезок CD длины l. На AB наудачу бросается случайная точка, вероятность попадания которой в любое место AB одинакова. Предполагается, что вероятность попадания случайной точки на отрезок CD не зависит от его расположения на AB. Тогда вероятность попадания случайной точки на отрезок CD будет

$$p = l/L.$$

Аналогично определяется вероятность попадания случайной точки в плоскую область d, площадь которой S_2, располагающуюся в области D, площадь которой S_1. Эта вероятность вычисляется по формуле

$$p = S_2/S_1.$$

Точно так же может быть определена геометрическая вероятность при бросании случайной точки в пространственную область.

Во многих сборниках задач по теории вероятностей фигурирует задача Бюффона: на плоскость, разграфленную параллельными прямыми, наудачу бросается игла. Найти вероятность того, что она пересечет какую-либо прямую. Расстояние между прямыми $2a$, длина иглы $2l$ ($l < a$). Эта задача рассмотрена Бюффоном в «Опыте нравственной арифметики» (1777).

Решим ее. Обозначим через x расстояние от середины иглы до ближайшей прямой, через φ — угол между иглой и этой прямой (рис. 4, *а*). Величины x и φ целиком определяют положение иглы. Очевидно, x принимает значе-

ния от 0 до a, φ — от 0 до π. Это означает, что середина иглы может попасть в любую точку прямоугольника со сторонами a и π (рис. 4, *б*). Точки этого прямоугольника, площадь которого $S = a\pi$, задают все возможные положения середины иглы.

Найдем теперь фигуру, точки которой будут благоприятствовать интересующему нас событию. Игла пересечет прямую при условии, что $x \leqslant l \sin \varphi$; значит, сере-

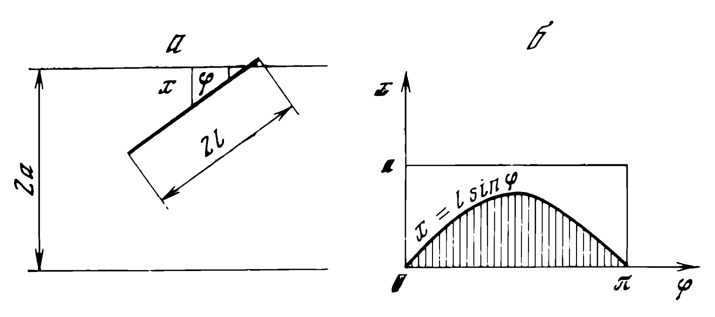


Рис. 4

дина иглы должна попасть в любую из точек заштрихованной фигуры на рисунке (см. рис. 4, *б*). Вычислим площадь этой фигуры:

$$S_1 = \int_0^\pi l \sin \varphi \, d\varphi = - l \cos \varphi \,|_0^\pi = 2l.$$

Следовательно, искомая вероятность будет

$$p = S_1/S_2 = 2l/a\pi.$$

Некоторые исследователи, выполнив достаточно большое число бросаний иглы и приняв относительную частоту m/n за вероятность, из формулы $p = 2l/a\pi$ находили приближенное значение π. Так, при 500 бросаниях было получено $\pi = 3{,}1596$, при 3204 опытах $\pi = 3{,}1558$, при 1120 бросаниях $\pi = 3{,}1419$. Лаццарини в 1901 г. из 3406 опытов получил для π шесть верных знаков.

В том же «Опыте нравственной арифметики» Бюффон решал задачу о бросании монеты на пол, выложенный шестиугольными плитками. Речь шла об игре, когда ставились деньги на то, что монета целиком ляжет внутрь одного из шестиугольников, или против этого. Задача также решается с помощью геометрической вероятности.

Бюффон применил вероятностные понятия для обоснования выдвинутой им гипотезы, согласно которой плане-

ты Солнечной системы произошли от столкновения Солнца с кометой.

В своих рассуждениях Бюффон указывал, что в практических вопросах события с малыми вероятностями следует считать невозможными, а с вероятностями, близкими к единице,— достоверными. Такие мысли сохранили свою актуальность до сих пор.

Кроме всего сказанного, Бюффон занимался исследованием некоторых таблиц смертности. Он воспользовался ими для установления «вероятностей продолжения жизни» по разным возрастам.

Но основным достижением Бюффона в теории вероятностей было введение в нее геометрической вероятности.

6

Человечество организовано так, что с движением его во времени в среднем наблюдается прогресс: совершенствуется сам человек, накапливается сумма знаний и умений, осуществляются открытия, одно значительнее другого, внедряются изобретения; эти открытия и изобретения происходят со все убыстряющейся частотой. Может быть, поэтому иногда наблюдается несколько пренебрежительное отношение к тому, что было до нас. В некотором смысле это и естественно. А. Пуанкаре писал: «Каждое поколение смеется над предыдущим, обвиняя его в слишком поспешных и слишком наивных обобщениях. Декарт выражал сожаление по адресу философов-ионийцев; в в свою очередь, он вызывает улыбку у нас; без сомнения, когда-нибудь наши потомки посмеются над нами» [40, с. 91].

Естественно, что каждый век живущим в нем кажется самым разумным. Это так, но, думаю, не вызову гнева физиологов утверждением, что мозг человека за два последних тысячелетия не претерпел значительных количественных и качественных изменений. И до нас были люди ничуть не глупее. Были великие: Платон, Аристотель, Пифагор, Архимед, Евклид, Аполлоний, Галилей, Ньютон, Спиноза, Гегель, Кант, Гомер, Эсхил, Софокл, Еврипид, Данте, Шекспир, Рабле, Сервантес, Достоевский, Толстой.

Но не могли быть раньше времени созданы, скажем, квантовая теория и теория относительности, осуществлены полеты в космос, изобретены лазеры, использована энергия атома, организована широкая сеть радио и телевизионной связи: уровень знаний и умений не позволял,

Так же, как и Эйлер, Д'Аламбер не сделал значительного вклада в теорию вероятностей. Он выступал с критикой не оформившихся в то время вероятностных понятий и самой теории вероятностей, что сыграло положительную роль. При изучении теории вероятностей теперь Д'Аламбера чаще всего упоминают в связи с его ошибкой, допущенной при подсчете выпадения герба два раза при двукратном бросании монеты.

Жан Лерон Д'Аламбер родился 16 ноября 1717 г. в Париже. Он был незаконнорожденным сыном писательницы де Тансен и артиллерийского офицера Детуша. Вскоре после рождения мать подкинула его на ступени церкви св. Жана Лерона, чем и объясняется его имя.

Д'Аламбер окончил коллеж Мазарини, где изучал право. Математикой занимался самостоятельно. В 1739 и 1740 гг. он представил Парижской Академии сочинения по гидродинамике и интегральному исчислению, в 1741 г. был избран адъюнктом академии. В 1756 г. Д'Аламбера избрали академиком, а в 1772 г. он стал непременным секретарем академии. Петербургская Академия избрала Д'Аламбера иностранным членом в 1764 г.

Основные работы Д'Аламбера относятся к механике, гидродинамике, небесной механике, математике. В 1743 г. в Париже опубликован «Трактат по динамике», содержащий известный «принцип Д'Аламбера», позволяющий сводить задачи динамики к задачам статики. В 1748 г. появились «Исследования по интегральному исчислению».

С 1750 по 1757 г. Д'Аламбер совместно с Д. Дидро руководил изданием «Энциклопедии». В первом томе ее (1751) помещена большая вступительная статья Д'Аламбера «Очерк происхождения и развития наук». В других томах также содержатся его статьи, в том числе «Геометрия», «Положительный», «Отрицательный», «Дифференциация», «Предел», статьи, связанные с теорией вероятностей, по философии, литературе, другим вопросам. Все они помещены в первых семи томах «Энциклопедии». После выхода седьмого тома в 1775 г. Д'Аламбер в выпуске «Энциклопедии» не участвовал.

Умер Д'Аламбер 29 октября 1783 г.

В статье «Энциклопедии» «Герб и решетка» Д'Аламбер решает задачу об определении вероятности появления хотя бы один раз герба при трех бросаниях монеты. Он считает, что если при первом или втором бросаниях появится герб, то дальше опыт проводить не следует. Таким образом, он рассматривает случаи: 1) появился герб;

2) появилась решетка, потом герб; 3) появились решетка, решетка, потом герб; 4) появились решетка, решетка и решетка. Вероятность получилась равной 3/4.

Д'Аламбер опять совершает ошибку. Суть дела в том, что указанные им исходы опыта неравновозможны. Правильное решение получим, если запишем все равновозможные исходы опыта. Они будут: (г, г, г), (г, г, р), (г, р, г), (р, г, г), (г, р, г), (р, г, р), (р, р, г), (р, р, р). Вероятность тогда получается 7/8, а не 3/4.

Д'Аламбер упоминает также «петербургскую игру», пишет по поводу ее решения: «Здесь имеется какой-то скандал, который заслуживает внимания математиков».

На ошибку Д'Аламбера в решении задачи при двукратном бросании монеты писал ему один женевский математик, но Д'Аламбер настаивал на своем решении.

В статье «Отсутствующий» Д'Аламбер из анализа таблиц смертности получил, что следует считать умершим отсутствующего 75 лет.

Вслед за Бюффоном Д'Аламбер полагал, что события с вероятностями меньше 0,0001 в одиночном испытании произойти не могут, хотя при большом числе испытаний они и возможны.

В «Энциклопедии» есть и другие статьи Д'Аламбера, посвященные азартным играм.

Работа Д'Аламбера «Размышления о теории вероятностей» содержится во втором томе «Математических произведений» (1761). В ней он отмечает, что понятие математического ожидания в некоторых случаях становится непригодным. Здесь он дает свое решение «петербургской задачи».

Д'Аламбер различает возможное метафизически и физически. Например, метафизически возможно выпадение 100 раз подряд по 6 очков на каждой игральной кости при бросании двух костей, а физически невозможно, так как никогда не происходило и не произойдет. Это служит подтверждением того, что маловероятные события можно считать невозможными.

В «Сочинениях и вопросах относительно теории вероятностей», вошедших в первый том Собрания сочинений (1821), Д'Аламбер относительно теории вероятностей пишет: «Я первый осмелился высказать сомнение относительно некоторых принципов, которые служат основанием для этой теории. Одни великие математики сочли эти сомнения достойными внимания, другие великие математики нашли их абсурдными (зачем я буду смягчать выра-

жения, которыми они пользовались?). Задача состоит в том, чтобы узнать, не были ли они неправы, применяя их, и в этом случае они оказались бы вдвое неправыми. Их решение, которое они не сочли нужным мотивировать, придало храбрость средним математикам, которые поторопились написать по этому вопросу и напасть на меня, не выслушав меня. Я попытаюсь объясниться настолько ясно, чтобы все мои читатели были в состоянии судить меня» [33, с. 134].

Вопросы теории вероятностей обсуждались Д'Аламбером и в переписке.

Чтобы показать мнение оппонентов, приведем суждение Эйлера. В работе «Решение некоторых более трудных вопросов теории вероятностей» (опубликована в 1875 г.) он пишет: «Я намереваюсь решить эти трудные вопросы на основании уже давно известных принципов теории вероятностей. И меня не останавливают возражения знаменитого Д'Аламбера, который пытался сделать сомнительным это исчисление. После того, как великий математик оставил математические занятия, представляется, что он даже объявил им войну, так как он приступил к разрушению многих наиболее твердо установленных основных положений. Хотя эти возражения, должно быть, имеют большое значение для незнающих, однако, нечего бояться, что они принесут какой-нибудь ущерб науке» [33, с. 137].

Может возникнуть вопрос: чем объясняются ошибочные суждения Д'Аламбера и его критика теории вероятностей? В первую очередь тем, что к тому времени не было еще оформленного понятия вероятности, в силу чего вероятность пытались применять там, где этого делать нельзя.

Важный этап

1

Большой вклад в теорию вероятностей внес Пьер Симон Лаплас. Его жизнь протекала в бурное и насыщенное важными событиями время для Франции, да и для всего человечества. Он был свидетелем перехода от феодально-самодержавной к буржуазно-конституционной монархии, от республики крупной буржуазии к якобинской диктатуре, перехода через контрреволюционную термидорианскую директорию к деспотизму наполеоновской империи, а затем — к реставрации Бурбонов. Три четверти столетия приспособленчества с целью политической и научной карьеры, неукротимого стремления к высотам науки, непрерывного научного труда отделяли крестьянского мальчика Пьера Симона от маркиза Лапласа — видного деятеля Академии наук.

Пьер Симон Лаплас родился в местечке Бомон на берегу р. Ож, в Нижней Нормандии, 23 марта 1749 г. Родители его — крестьяне. О детстве Лапласа известно мало: он не любил вспоминать о нем и о родителях (впрочем, они ему платили тем же). Считается, что с помощью покровителей он попал в коллеж, где изучал языки, литературу, математику, богословие. Вероятнее всего, покровители снабжали его трудами французских материалистов XVIII в. и великих математиков. В результате чтения их Лаплас стал атеистом, сторонником французских материалистов, знатоком современной науки.

После окончания коллежа Лаплас отправился из Бомона в Париж, имея при себе рекомендательные письма. Он намеревался наладить контакты с деятелями академии. Парижская Академия в ту пору переживала период бурного расцвета — в ней работали гениальные ученые в области многих наук, в том числе — математики и механики.

Лаплас со своими рекомендациями решил обратиться к пользовавшемуся тогда огромной известностью Д'Аламберу, но его не приняли. Тогда Лаплас выбрал другой

путь: он изложил на бумаге свои взгляды на основные принципы механики и пути ее развития в ближайшем будущем и отправил Д'Аламберу письмо.

Д'Аламбер был удивлен эрудицией и глубокими мыслями Лапласа и сразу же ответил ему: «Милостивый государь! Вы имели случай убедиться, как мало я обращаю внимания на рекомендации, но Вам они были совершенно не нужны. Вы зарекомендовали себя сами, и этого мне совершенно достаточно. Моя помощь к Вашим услугам. Приходите же, я жду Вас» [8, с. 17].

Вскоре с помощью Д'Аламбера Лаплас занял место профессора в Королевской военной школе Парижа и получил доступ в академию. В течение первых двух лет пребывания в Париже Лаплас представил академии несколько оригинальных работ по чистой математике, теории вероятностей, небесной механике.

В 1773 г. Лапласа избрали адъюнктом академии, тогда же он стал экзаменатором в Королевском корпусе артиллеристов. Это значительно улучшило материальное положение Лапласа. С 1785 г. Лаплас — член Парижской Академии наук.

Основной труд Лапласа — пятитомная «Небесная механика» (1798—1825). В ней он дал объяснение движений Солнечной системы на основе закона всемирного тяготения, доказал устойчивость Солнечной системы, разрешил многие вопросы, не поддававшиеся предшественникам. В приложении к «Изложению системы мира» (1796) Лаплас разработал гипотезу о происхождении Солнечной системы. «Небесная механика» и «Изложение системы мира» сообщили импульс развитию астрономии и оказали значительное влияние на философию.

В математике работы Лапласа связаны с теорией интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных. Некоторые методы в этой области носят его имя. Лаплас выполнил основополагающие исследования по теории тяготения и теории вероятностей; он развил теорию потенциала, открыл играющие важную роль шаровые функции.

Совместно с А. Л. Лавуазье (1743—1794) Лаплас произвел исследования по теплоте и электричеству. Они опытным путем изучали теплоемкость тел, скрытую теплоту плавления, проводили опыты по горению водорода в кислороде, установлению атмосферного электричества.

Лаплас изучал явление капиллярности; один из законов этого процесса носит его имя. Он получил формулу

для вычисления скорости звука в воздухе, а также барометрическую формулу, по которой определяется изменение плотности воздуха с высотой. В «Большой Советской Энциклопедии» имеется семь статей с описанием терминов, носящих имя Лапласа.

Научная деятельность Лапласа получила всеобщее признание. В 1801 г. его избрали в Королевские общества Турина и Копенгагена, в 1802 г.— в Академию наук в Гёттингене, в 1808 г.— в Берлине, в 1809 г.— в Голландии. С 1802 г. Лаплас — иностранный почетный член Петербургской Академии наук.

Лаплас принял активное участие в создании Нормальной и Политехнической школ; с 1794 г. был профессором в Нормальной школе. В 1790 г. возглавил Палату мер и весов, руководил введением метрической системы мер. В 1795 г. вошел в состав Бюро долгот.

Не оставили вниманием Лапласа и сильные мира: Наполеон предоставил ему место министра внутренних дел, произвел в сенаторы, возвысил в графское достоинство, посвятил в рыцари Почетного легиона; Людовик XVIII назначил президентом комиссии по преобразованию Политехнической школы, сделал его пэром, возвел в звание маркиза.

Оценки личностных качеств Лапласа разноречивы. Он умел приспосабливаться к любым условиям — ему довелось пережить монархию, революцию, власть Наполеона, реставрацию Бурбонов и всегда успешно работать. Не будем вдаваться в детализацию этого вопроса: нас интересует развитие науки, которой Лаплас отдал всю жизнь. Умер Лаплас 5 марта 1827 г. Последними его словами были: «То, что мы знаем, так ничтожно сравнительно с тем, чего мы не знаем».

2

Обратимся теперь к рассмотрению вклада Лапласа в теорию вероятностей.

И что стимулировало ее развитие?

Исследования по астрономии, физике, мореплавание ставили необходимость создания теории ошибок наблюдений. Потребность в ней испытывали картография, уточнение формы Земли по различным измерениям, введение метрической системы мер.

В связи с выдвинутой Кантом и Лапласом гипотезой о происхождении Солнечной системы возникли некото-

рые космогонические проблемы, решаемые методами теории вероятностей.

Задачи демографии и математической обработки результатов биологических наблюдений приводили к дальнейшему развитию и совершенствованию математической статистики.

В XIX в. оформились представления о статистическом характере физических законов, что способствовало внедрению теории вероятностей в физику.

В самой теории вероятностей наметился знаменательный переход от схемы событий в схеме случайных величин, хотя понятие случайной величины и было оформлено значительно позднее.

За время с 1774 по 1786 г. Лаплас издал несколько мемуаров, посвященных теории вероятностей. В «Лекциях по математике для нормальной школы» (1795) он кратко изложил теорию вероятностей. Эти «Лекции» послужили базой для написанного значительно позднее «Опыта философии теории вероятностей» (1814). Основной труд представляет фундаментальная «Аналитическая теория вероятностей», издававшаяся в 1812, 1814 и 1820 гг. Здесь подытожены результаты самого Лапласа и его предшественников. «Аналитическая теория вероятностей» вошла в седьмой том полного собрания сочинений Лапласа (1886).

Лаплас утверждал, что все явления природы сводятся к небольшому числу законов, одним из которых служит закон всемирного тяготения. Другой основной закон — закон нормального распределения вероятностей, объясняющий процессы, связанные с массовыми явлениями. В согласии с этим находится роль теории вероятностей в науке и жизни общества.

В кратком введении к «Опыту философии теории вероятностей» после упоминания об истории происхождения этого труда Лаплас замечает, что намерен показать применение методов и принципов теории вероятностей к различным вопросам жизни, «большинство которых не что иное, как задачи теории вероятностей». Он утверждает, что вся система человеческих знаний связана с теорией вероятностей. Таково значение этой теории. Поэтому Лаплас призывает философов к изучению предмета, столь достойного их внимания.

К основным принципам теории вероятностей Лаплас относит данное им определение вероятности, получившее впоследствии наименование классического, а также теоремы сложения вероятностей несовместных событий, сло-

жения вероятностей совместных событий, умножения вероятностей независимых событий, умножения вероятностей зависимых событий, формулу полной вероятности, формулу Байеса, математическое ожидание, моральное ожидание. Заметим, что, кроме терминов «математическое ожидание» и «моральное ожидание», упомянутых выше названий у Лапласа нет, они появились позднее.

Как и всюду в книге, Лаплас сопровождает принципы примерами. При обсуждении теоремы сложения вероятностей он решает задачу Д'Аламбера об определении вероятности выпадения герба хотя бы один раз при двукратном бросании монеты и исправляет решение Д'Аламбера. Он вычисляет вероятность восхода Солнца, которая была определена ранее Бюффоном, анализирует «петербургскую задачу».

Следует высказать несколько замечаний о классическом определении вероятности. Очевидно, оно содержит порочный круг: вероятность определяется среди равновозможных событий, т. е. равновероятных. Кроме того, в большинстве опытов нельзя заранее определить, равновозможны исходы их или нет. Поэтому попытки применить классическое определение вероятности к широкому классу явлений к цели не приводили. Классическое определение вероятности породило толкование ее как меры нашего незнания, степень уверенности кого-то, что субъективно.

Значительная часть «Опыта...» отводится словесному пояснению, без формул, аппарата, который применяется в «Аналитической теории вероятностей». Это известные еще Муавру конечно-разностные уравнения и введенные Лапласом производящие функции [1]. Однако словесное изложение не упрощает, а усложняет существо.

В ходе обсуждения конечно-разностных уравнений Лаплас дал общее решение задачи о разделении ставки, которую Паскаль предложил для решения Ферма.

В конце главы Лаплас приводит обзор некоторых достижений П. Ферма, Р. Декарта, Г. В. Лейбница, И. Ньютона, Д. Валлиса в построении анализа бесконечно малых в связи с применяемыми им производящими функциями. Он пишет: «Все, что касается рядов и интегрирования разностных уравнений, вытекает из нее (теории производящих функций.— *В. Н.*) с необычайной легкостью» [28, с. 57].

Но производящие функции как особый вид исчисления развития не получили и сохранились в основном в теории вероятностей.

Вслед за тем в «Опыте...» обсуждаются различные приложения теории вероятностей к анализу игр, «к натуральной философии», «нравственным наукам», анализу свидетельских показаний, судебных приговоров, выборов и решений собраний, средней продолжительности жизни, «браков и каких-либо ассоциаций», таблиц смертности; в конце книги помещена краткая история теории вероятностей.

Изложение таково, что от книги невозможно оторваться. Лаплас охватывает многие жизненные вопросы, и создается впечатление, что теория вероятностей и в самом деле может найти применение в различных видах человеческой деятельности.

Но не все так, как полагал Лаплас. Некоторые его высказывания сейчас кажутся наивными. Это и понятно: прошло более полутора столетий, и мы обогащены полуторавековым опытом человечества.

Высоко оценивались Лапласом достижения Я. Бернулли в теории вероятностей и доказанная им теорема. Он пользовался ею при обосновании многих выводов, связанных с массовыми явлениями, в том числе и в общественной жизни.

В качестве еще одного приложения теоремы Бернулли Лаплас исследовал деторождаемость и установил, что отношение числа рождений мальчиков к числу рождений девочек для разных стран будет 22 : 21. Этот результат подтвердили и данные А. Гумбольдта, собранные им в тропических районах Южной Америки.

Отклонение отношения числа рождений мальчиков к числу рождений девочек, обнаруженное в Париже, объясняется тем, что жители близлежащих деревень направляли в приют для подкидышей в Париже чаще девочек, чем мальчиков. Это подтвердили списки поступлений в приют с 1745 по 1809 г.

В качестве приложений теории вероятностей к «натуральной философии» Лаплас описывает способы, примененные им для обработки астрономических наблюдений и геодезических измерений, и полученные результаты в некоторых особенностях движений Луны, Сатурна, Юпитера и его спутников.

Лаплас отмечает, что 11 планет (в число их включаются и крупнейшие астероиды) вращаются вокруг Солнца в одном направлении почти в плоскости его экватора. Вместе с одинаковым вращением вокруг своих осей Солнца, шести планет, спутников Юпитера, кольца Сатурна и его спутников это составляет 43 движения в одном направле-

нии. Он утверждает, что имеется четыре тысячи миллиардов шансов против одного в пользу наличия постоянной причины этих движений.

Лаплас подвергает анализу также другое явление — малый эксцентриситет орбит планет и спутников, «в то время как орбиты комет очень растянуты», и делает вывод о влиянии здесь также регулярной причины.

Эти рассуждения привели Лапласа к построению основ его космогонической гипотезы. Он пишет: «В моем «Изложении системы мира», я пространно развил эту гипотезу, которая, как мне кажется, согласна со всеми явлениями, встречающимися в этой системе» [28, с. 95].

С той же направленностью Лаплас рассматривает неоднородность строения Земли от поверхности к центру и явление приливов в морях и океанах, а также в атмосфере.

Уверенный в универсальной применимости теории вероятностей, Лаплас высказывает соображения относительно действия различных причин на животных, в частности влияния Солнца и Луны на состояние нервной системы. «Естественно указать,— пишет он,— что действие этих причин очень слабо и что оно легко может быть нарушено случайными обстоятельствами; так что нельзя отвергать его существования из-за того, что в некоторых случаях оно не обнаружилось. Мы так далеки от знания всех сил природы, что было бы мало научно отрицать явления только потому, что они необъяснимы при современном состоянии наших знаний. Мы должны только исследовать их с тем большими вниманием и тщательностью, чем нам кажется труднее допустить их; здесь-то становится необходимым исчисление вероятностей для того, чтобы определить, до каких пор следует умножать наблюдения или опыты, чтобы получить в пользу обнаружившихся в них сил вероятность, которая одержала бы верх над теми основаниями, на которых их все-таки можно бы не признавать» [28, с. 103—104].

В следующих главах Лаплас рассматривает применение теории вероятностей к «нравственным наукам». Поскольку на «человеческие учреждения» влияют скрытые, не поддающиеся оценке причины, к анализу их деятельности приложимы методы теории вероятностей. Так полагал Лаплас.

Уместно отметить вот что. Лаплас пользовался огромным научным авторитетом, поэтому его последователи пытались развивать приложение теории вероятностей к раз-

личным областям человеческой деятельности, что не приводило к цели и служило тормозом в развитии науки.

«Применим, — пишет Лаплас, — к политическим и нравственным наукам метод, основанный на наблюдении и исчислении, метод, который служил нам так хорошо в науках естественных. Не будем противополагать бесполезного и часто опасного сопротивления неизбежным следствиям прогресса просвещения, но будем изменять лишь крайне осторожно наши учреждения и обычаи, к которым мы давно уже применились. Мы хорошо знаем по опыту прошлого неудобства, которые они представляют, но мы не знаем, как велико будет зло, которое может причинить их изменение. При такой неизвестности теория вероятностей предписывает избегать всякого изменения: особенно следует избегать внезапных изменений, которые в нравственном порядке, как и в физическом, никогда не происходят без потери живой силы» [28, с. 105—106].

Как видим, Лаплас выступает против резких революционных преобразований в обществе. Но не будем по этой цитате считать его реакционером. Можно предположить, что никто из организаторов революций «Опыт...» Лапласа не читал.

Хотя воззрения Лапласа о применении методов теории вероятностей к общественным наукам получили развитие в трудах некоторых математиков, сейчас они совершенно забыты. Вот, например, рассуждения Лапласа относительно судебных приговоров: многочисленный состав суда обеспечивает справедливый приговор. Это обосновывается законом больших чисел Я. Бернулли: чем больше голосов в составе суда будет подано по вопросу о виновности или невиновности подсудимого, тем меньше возможность допустить ошибку. Рассматривается даже случай суда, состоящего из 1001 человека. И голосование: 500 за и 501 против.

Лаплас пишет: «Анализ подтверждает то, что нам подсказывает здравый смысл, а именно, что мягкость судебных приговоров тем более вероятна, чем многочисленнее состав суда и просвещеннее судьи» [28, с. 127].

Значительное место в книге уделено таблицам смертности и использованию их при определении средней продолжительности жизни, браков, вероятности достижения определенного возраста, подсчете численности населения городов и стран. Отмечается, что на смертность влияют «здоровая почва, высота ее, ее температура, нравы жителей и мероприятия правительств», и указывается, что

вычисленное на основании большого количества данных отношение численности населения к годичным рождениям во Франции почти на 4 единицы выше, чем в Миланском герцогстве, и это должно побудить правительство Милана отыскать и уничтожить причину смертности.

Численное отношение населения к рождениям должно увеличиваться с устранением болезней. В связи с этим упоминается открытие вакцины против оспы, приводится проведенные с помощью теории вероятностей исследование Д. Бернулли по определению влияния прививок на среднюю продолжительность жизни, а также критика этого исследования Д'Аламбером.

Не обошел вниманием Лаплас и психическую деятельность человека, полагая, что и здесь есть место для приложения исчисления вероятностей и соответствующих принципов.

Как уже было упомянуто, заканчивается «Опыт...» историческим обзором развития теории вероятностей. Рассмотрен вклад, сделанный в нее Паскалем, Ферма, Гюйгенсом, Гудде, де Виттом, Галлеем, Я. Бернулли, Монмором, Муавром, Н. Бернулли, Байесом, Д. Бернулли. Особая значимость придается созданному А. Лежандром и К. Гауссом методу наименьших квадратов *, который Лаплас применил к обработке астрономических наблюдений и геодезических измерений.

В заключение Лаплас пишет, что в своей «Аналитической теории вероятностей» поставил цель в общем виде изложить разработанные методы и принципы теории вероятностей и привести решение интересных и трудных задач.

«Из этого видно,— делает вывод Лаплас,— что теория вероятностей есть в сущности не что иное, как здравый смысл, сведенный к исчислению: она заставляет оценивать с точностью то, что справедливые умы чувствуют как бы инстинктом, часто не умея отдать себе в этом отчета. Если принять во внимание аналитические методы, которые возникли из этой теории, истинность принципов, служащих ей основанием, утонченную и изящную логику, которой требует применение их к решению задач, учреждения общественной пользы, опирающиеся на нее, и распространение, которое она получила и может еще получить при применении ее к важнейшим вопросам натуральной философии и нравственных наук; если затем заметить, что

* О нем речь впереди.

даже в таких областях, которые не могут быть подчинены исчислению, она дает самые верные взгляды, которые могут нами руководить в наших суждениях, и что она нас учит предохранять себя от иллюзий, которые нас часто сбивают с пути,— мы увидим, что нет науки, более достойной наших размышлений, и что было бы очень полезно ввести ее в систему народного просвещения» [28, с. 205—206].

Это гимн теории вероятностей, провозглашенный Лапласом.

3

При рассмотрении вклада в теорию вероятностей Муавра были упомянуты случайные величины, их законы распределения, числовые характеристики. Остановимся на этом несколько подробнее.

Случайные величины обозначаются буквами X, Y, Z, возможные значения их $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретными случайными величинами, например, будут: относительная частота попаданий в мишень при четырех выстрелах, ее возможные значения 0, 1/4, 2/4 = 1/2, 3/4, 4/4 = 1; число бракованных изделий в партии из n штук, возможные значения ее 0, 1, 2, . . ., n. Непрерывными случайными величинами будут: время непрерывной работы электронной трубки телевизора; процентное содержание какого-либо химического элемента в некоторой марке стали.

Очевидно, случайная величина связана с событием, и понятие случайной величины обобщает понятие события.

Случайная величина принимает различные значения с соответствующими вероятностями. Поскольку возможные значения случайных величин образуют полную группу [2] несовместных событий, сумма таких вероятностей равна единице. Соотношение между возможными значениями случайной величины и вероятностями того, что она примет эти значения, называется законом распределения вероятностей дискретной случайной величины. Он может задаваться таблицей, графиком или формулой, связывающей возможные значения с вероятностями.

Введем случайную величину X — число появлений события при n испытаниях Бернулли. Возможные значения ее 0, 1, 2, 3, . . ., n. Вероятность того, что случайная величина примет одно из этих значений, вычисляется по

формуле Бернулли

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — вероятность появления события A при одном испытании, $q = 1 - p$ — вероятность непоявления его.

Закон распределения, определенный формулой Бернулли, называется биномиальным.

Закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины задать в указанных формах нельзя, так как вероятность того, что непрерывная случайная величина примет конкретное значение, равна нулю, а число возможных значений ее бесконечно.

Одной из форм закона распределения вероятностей непрерывной случайной величины служит функция распределения вероятностей. Это такая функция x, которая для каждого значения x указывает вероятность того, что случайная величина примет значение меньше выбранного x, т. е. вероятность неравенства $X < x$. Таким образом,

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция распределения служит законом распределения и для дискретных случайных величин. Она определяется формулой

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Отметим свойства функции распределения: 1) $0 \leqslant F(x) \leqslant \leqslant 1$; 2) $F(x_2) \geqslant F(x_1)$, если $x_2 \geqslant x_1$; 3) $P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$; 4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

График функции распределения непрерывной случайной величины представляет собой сплошную линию. График функции распределения дискретной случайной величины — ступенчатая ломаная линия.

У непрерывных случайных величин существует еще одна форма закона распределения — плотность распределения вероятностей. Плотностью распределения называется производная от функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

С помощью функции распределения можно определить вероятность попадания случайной величины на заданный интервал (свойство 3). Плотность распределения позволяет определить вероятность попадания ее в окрестность произвольной точки.

По распределению случайной величины находят числа, дающие общее представление о распределении. Они называются числовыми характеристиками случайных величин. К ним относятся: математическое ожидание, дисперсия (и среднее квадратическое отклонение), начальные и центральные моменты различных порядков.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений ее возможных значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется интегралом:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx,$$

где $f(x)$ — плотность распределения вероятности.

Дисперсия случайной величины характеризует рассеивание ее значений относительно математического ожидания. Она представляет собой математическое ожидание квадрата отклонения ее от математического ожидания: $D(X) = M[X - M(X)]^2$.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Если случайная величина распределена по биномиальному закону, то математическое ожидание ее и дисперсия вычисляются по формулам

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

Начальным моментом порядка k случайной величины называется математическое ожидание ее k-й степени:

$$\nu_k = M(X^k).$$

Центральным моментом порядка k случайной величины называется математическое ожидание k-й степени ее отклонения:

$$\mu_k = M[X - M(X)]^k.$$

О вкладе ученого в науку и его творческом авторитете судят по тому, как относились к нему современники, как его открытия стимулировали творчество других, какие из них сохранились на 10, 20, 100 лет и более. Труды Лапласа при жизни получили полное признание, он постоянно общался с выдающимися учеными, после него осталась блестящая школа математиков, астрономов, механиков.

Основные достижения Лапласа в теории вероятностей — предельная теорема и развитие теории ошибок наблюдений. Полученные в теории вероятностей результаты, частично изложенные в упомянутых выше мемуарах, Лаплас решил суммировать в отдельной книге. Так появилась «Аналитическая теория вероятностей». Ее название подчеркивает роль, отводимую в то время в естествознании математике: ранее была опубликована «Аналитическая механика» Лагранжа, несколько позднее — «Аналитическая теория тепла» Ж. Фурье.

«Аналитическая теория вероятностей» состоит из двух книг. Первая посвящена теории производящих функций, решению конечно-разностных уравнений, вычислению некоторых интегралов, послуживших основой для оформившегося впоследствии «преобразования Лапласа» [3]. Все это было аппаратом, с помощью которого Лаплас более просто и изящно получил известные ранее и новые результаты.

Вторая книга посвящена собственно теории вероятностей. В ней сформулировано классическое определение вероятности как отношения количества благоприятствующих появлению события исходов опыта к общему числу равновозможных исходов, решены многие задачи, доказана предельная теорема о сходимости биномиального распределения к нормальному, развиты основы математической статистики, теории ошибок.

Примененные Лапласом при решении задач методы были общими и стали базой для дальнейшего развития теории. Например, рассмотренная им задача о разорении игрока в настоящее время находит важные физические приложения. Задачу Д. Бернулли, связанную с перекладыванием белых и черных шаров из одной урны в другую и определением вероятности того, что после некоторого количества циклов в одной из урн окажется x белых шаров, Лаплас свел к дифференциальному уравнению и решил его. Этой же задачей занимались в 1915 г. А. А. Марков, В. А. Стеклов; М. Смолуховский (1872—1917) полу-

чил такое же дифференциальное уравнение при исследовании броуновского движения. Результат Лапласа предварял одну из теорем теории цепей Маркова.

Важное значение придавал Лаплас предельным теоремам. Он видел в них математический аппарат для установления значимости результатов статистических наблюдений и считал, что они обеспечат торжество «вечных принципов разума, справедливости и гуманности» [28, с. 65]. В «Математике XIX века» отмечается, что этот гуманизм Лапласа привлекал математиков к теории вероятностей, в частности русских математиков, в том числе П. Л. Чебышева.

Чтобы двигаться дальше, необходимо пояснить некоторые термины. Понятие предела последовательности или функции (из математического анализа) в теории вероятностей неприменимо. Его роль здесь играет понятие сходимости по вероятности.

Говорят, что последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ сходится, по вероятности, к числу A, если выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(|X_n - A| < \varepsilon\right) = 1$ для любого положительного ε.

Нормальный закон распределения * случайной величины задается плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

где σ — среднее квадратическое отклонение, a — математическое ожидание.

Обратимся к смыслу предельной теоремы Лапласа — простейшей формы центральной предельной теоремы.

Теорема Я. Бернулли состоит в том, что, когда число опытов велико, относительная частота m/n события сходится, по вероятности, к вероятности p появления его в одном опыте, т. е. величина $m/n - p = y$ стремится к нулю, если $n \to \infty$.

Лаплас заинтересовался характером этого процесса. Ведь когда $n \to \infty$, скажем, величины $1/n$ и $1/n^2$ стремятся к нулю, но с различными «скоростями». Опытом было установлено, что $y \to 0$ по интенсивности так же, как $1/\sqrt{n}$; это означает, что отношение y: $1/\sqrt{n} = \lambda$ остается в некоторых пределах при любом увеличении числа испытаний, т. е. $\lambda_1/\sqrt{n} < y < \lambda_2/\sqrt{n}$.

* Этот термин ввел А. Пуанкаре.

Рассмотрим систему координат $O\lambda q$. Разобьем горизонтальную ось $O\lambda$ на небольшие отрезки и на каждом из них построим прямоугольник, площадь которого равна вероятности того, что значение λ находится на данном

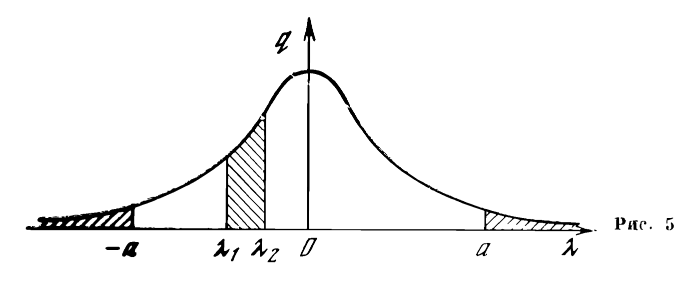


Рис. 5

отрезке. Получим ступенчатую фигуру, ограниченную ломаной линией. Если число делений горизонтальной оси увеличивать безгранично, то ломаная превратится в кривую (рис. 5). Здесь вероятность того, что значение λ будет находиться между λ_1 и λ_2, равно площади заштрихованной фигуры на рисунке.

Построенная Лапласом кривая симметрична относительно оси Oq, имеет наибольшее значение, когда $\lambda = 0$, и асимптотически приближается к оси $O\lambda$. Площадь, ограниченная кривой и осью $O\lambda$, равна единице и соответствует тому, что значение λ заключено на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$.

Выберем достаточно большое положительное число a; пусть суммарная площадь фигур с основаниями $(-\infty, -a)$ и (a, ∞) будет ε. Она как угодно мала, потому что кривая асимптотически приближается к оси $O\lambda$. Вероятность того, что значение λ попадает на интервал $(-a, a)$, станет равной $1 - \varepsilon$ и в случае малого ε близкой к единице. Кривая Лапласа такова, что даже и не для очень малых значений ε интервал $(-a, a)$ не очень велик, поэтому наиболее вероятные значения λ лежат в сравнительно узких границах.

Таким образом, Лапласом получен качественно отличный результат в сравнении с теоремой Я. Бернулли: теорема Бернулли утверждает, что с увеличением числа опытов относительная частота m/n стремится к вероятности p появления события в одном опыте; теорема Лапласа дает возможность с вероятностью $1 - \varepsilon$ установить границы отклонения относительной частоты от упомянутой вероятности, именно $-a/\sqrt{n} < m/n - p < a/\sqrt{n}$.

С помощью интегральной теоремы Лапласа при боль-

шом числе испытаний n можно вычислить вероятность того, что случайная величина примет значение между значениями k_1 и k_2:

$$P_n(k_1, k_2) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2}\, dz,$$

где $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$, $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}.$

Интеграл $\int e^{-x^2/2} dx$ через элементарные функции не выражается, поэтому на практике пользуются таблицами функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2}\, dz.$$

Выразим записанную вероятность через функцию Лапласа; получим

$$P_n(k_1, k_2) \cong \frac{1}{2\pi} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{0} e^{-z^2/2}\, dz + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x''} e^{-z^2/2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x''} e^{-z^2/2}\, dz - \\ - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x'} e^{-z^2/2}\, dz = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Локальной теоремой Лапласа, пользуются, когда необходимо вычислить вероятность того, что случайная величина примет значение k (имеется в виду, что число испытаний велико, так что формула Бернулли приводит к громоздким вычислениям). Эта вероятность такова:

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2},$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Известно, что вероятность попадания случайной величины на заданный интервал вычисляется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx,$$

где $f(x)$ — плотность распределения вероятностей.

Определим эту вероятность для случайной величины, распределенной по нормальному закону:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,dx.$$

Сделаем замену $(x - a)/\sigma = z$, тогда $x = a + \sigma z$, $dx = \sigma dz$, $(\alpha - a)/\sigma \leqslant z \leqslant (\sigma - a)/\sigma$. Найдем

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-z^2/2}\,dz.$$

С помощью функции Лапласа эта вероятность запишется в виде

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Рассмотрим опыт, состоящий в повторении одинаковых независимых испытаний, и пусть в результате каждого испытания может произойти некоторое событие. Введем случайную величину X_k, которая принимает значение 1, когда событие произошло, и 0, когда оно не произошло. Тогда число m, показывающее, сколько раз произошло событие, если общее число испытаний n, можно рассматривать как сумму независимых случайных величин X_k:

$$m = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Таким образом, теорема Лапласа предстает как частный случай более общих предельных теорем.

Как уже было отмечено, Лаплас широко пользовался открытой им теоремой для решения вероятностных задач, а также в математической статистике и обработке результатов экспериментальных исследований.

В самом деле, если обнаруживалось, что некоторые результаты наблюдений не лежат в пределах достаточной вероятности, то это свидетельствовало о наличии каких-то причин, под влиянием которых произошло изменение вероятности событий. Так было, например, при обнаружении Лапласом аномалий в движении некоторых светил и изучении им проблемы деторождения.

Лаплас уделил в своем творчестве значительное место развитию теории ошибок наблюдений. В третьем издании «Аналитической теории вероятностей» помещены три до-

полнения, посвященные ей. Лаплас построил способы нахождения наивероятнейших значений измеряемых величин и определения достоверности полученных результатов.

К развитию теории ошибок Лапласа естественным образом приводили занятия астрономией. Он высказал плодотворную идею о формировании наблюдаемой ошибки при суммировании большого количества независимых элементарных ошибок. Если они малы, то распределение их суммы близко к нормальному.

Для оценки неизвестной величины a по результатам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ независимых измерений Лаплас рекомендовал брать такое значение $\tilde{a}$, при котором обращается в минимум сумма $\sum_{i=1}^{n} |x_i - \tilde{a}|$. Прием не получил последующего распространения, поскольку вскоре пошел в практику более эффективный метод наименьших квадратов, разработанный Лежандром и Гауссом.

Завершая рассмотрение творчества Лапласа, следует сказать, что многие физико-математические науки, статистика, экономика, транспорт, страхование жизни и имущества, коммунальное хозяйство, различные отрасли науки и техники пользуются результатами трудов Лапласа в области теории вероятностей и математической статистики.

Правда, попытки Лапласа и его последователей применять теорию вероятностей к общественной жизни тормозили ее развитие. Как правильно сказал Д. С. Милль: «Приложение теории вероятностей к судам является математическим скандалом».

5

Теорию ошибок наблюдений, которой мы пользуемся и сейчас, создал Гаусс. Ему принадлежит так много научных достижений, что его называли королем математиков. В феврале 1855 г. по заказу Ганноверского двора была изготовлена медаль с барельефом Гаусса, под которым так и значится: Mathematicorum princes (Король математиков).

Карл Фридрих Гаусс родился 30 апреля 1777 г. в Брауншвейге. Отец его был водопроводчиком. Математическая одаренность будущего ученого проявилась очень рано. Легенда утверждает, что он в возрасте трех лет, наблюдая однажды за расчетами отца, поправил его. Сам Гаусс заметил, что научился считать раньше, чем говорить.

Умением считать он поразил учителя в начальной школе. Занятия там проводились одновременно с детьми разных возрастов, поэтому учитель давал задание одним для самостоятельного выполнения, чтобы в это время заниматься с другими. Группе учеников он предложил просуммировать натуральные числа от 1 до 100. Каждый выполнивший задание должен был класть грифельную доску на стол учителя. Гаусс положил ее сразу же после того, как учитель кончил диктовать задачу. И только у него оказался правильный ответ: десятилетний Гаусс самостоятельно открыл формулу для суммы n первых членов арифметической прогрессии.

Выдающиеся вычислительные способности Гаусса сыграли особую роль в его творчестве. Ф. Клейн, исследовавший творчество Гаусса, отметил, что Гаусс, будучи еще мальчиком, накопил такой эмпирический материал, каким не обладал никто из математиков ни до, ни после него. Как пример Клейн привел выражение Гауссом дробей $1/p$ от $p = 1$ до $p = 1000$ в виде десятичных дробей. Гаусс искал при этом полные периоды, что иногда требовало нескольких сотен десятичных знаков. Из обильного эмпирического материала у Гаусса возникли многие идеи теории чисел.

После случая с суммированием арифметической прогрессии слава о Гауссе распространилась по городу и дошла до герцога Брауншвейгского, который содействовал Гауссу в поступлении в Гёттингенский университет. Гаусс учился в университете в 1795—1798 гг. Здесь, как и перед этим в гимназии, он не мог решить, что избрать в качестве профессии — математику или филологию, которой занимался также успешно. Выбор математики произошел после знаменитого открытия Гаусса в марте 1796 г. возможности построения правильного 17-угольника.

С 1807 г. Гаусс стал директором университетской астрономической обсерватории в Гёттингене и профессором университета. Эти должности он занимал до своей смерти.

Гёттингенский университет был и остается до сих пор одним из математических центров. В нем работали такие выдающиеся математики, как Г. Ф. Б. Риман, Ф. Клейн, А. Э. Нетер, Д. Гильберт.

На первых порах жизни в Гёттингене на Гаусса обрушились несчастья. В 1809 г., после рождения сына, умерла жена, а вскоре и сам ребенок. Наполеон обложил Гёттинген контрибуцией, и Гаусс должен был выплатить непосильный налог — 2000 франков. Астроном Г. В. Оль-

берс и Лаплас предлагали Гауссу свою помощь, но он отказался. Тайно от Гаусса внес деньги курфюрст Майнцский, друг Гёте.

Творчество Гаусса охватывает многие области математики и других наук. Он провел основополагающие исследования в теории чисел, высшей алгебре, дифференциальной геометрии, геодезии, небесной механике, астрономии, теории электричества и магнетизма, математической физике. Вместе с В. Вебером Гаусс разработал систему единиц CGS.

В 1801 г. Петербургская Академия наук избрала Гаусса членом-корреспондентом, а в 1824 г.— иностранным членом. По предложению Гаусса, в 1842 г. Н. И. Лобачевского избрали членом-корреспондентом Гёттингенского научного общества. В возрасте 62 лет Гаусс выучил русский язык.

Гаусс придерживался нормы: «Не считать ничего сделанным, если еще кое-что осталось сделать». Возможно, убеждение в этом, а также боязнь «крика беотийцев» [4] не позволили ему опубликовать при жизни некоторые великие открытия, в том числе по неевклидовой геометрии, теории эллиптических и абелевых функций, теории функций комплексного переменного. Об этом математикам стало известно после изучения личных бумаг Гаусса во второй половине XIX в. Многие результаты Гаусса были переоткрыты О. Коши, Н. Абелем, К. Г. Якоби и другими математиками.

Умер Гаусс 23 ноября 1855 г.

6

Хотя теория вероятностей лежала вне русла интересов Гаусса, его немногочисленные работы в этом направлении значительно повлияли на ее развитие.

Творчеству Гаусса присуще сочетание глубоких абстрактных теорий с решением практических задач. Его постоянно интересовали астрономия и геодезия, что естественным путем приводило к построению методов обработки результатов наблюдений и созданию теории ошибок. Это, в свою очередь, стимулировало исследование условий применимости нормального закона распределения и оценки параметров его, что стало важной проблемой математической статистики.

Давно было известно, что измеряемую величину точно определить невозможно: каждое измерение сопровождается погрешностью, ошибкой. Ошибки подразделяются

на систематические, обусловленные используемыми приборами и способом измерений, и случайные. Перед исследователем вставал вопрос исключения из полученных результатов не только систематических, но и случайных ошибок, чтобы получить наиболее вероятное значение измеряемой величины. Для этого разрабатывались различные методы.

Уже говорилось и будет говориться в дальнейшем о методе наименьших квадратов, поэтому необходимо уделить ему определенное внимание. Он применяется для нахождения неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки, а также приближенного представления определенных функций по некоторым значениям их более простыми функциями.

Предположим, что по результатам независимых измерений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ необходимо найти неизвестную величину x. Обозначим случайные ошибки δ_i ($i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$) и запишем $y_i = x + \delta_i$. Ошибки представляют собой независимые случайные величины с математическим ожиданием $M(\delta_i) = 0$ и дисперсией $D(\delta_i) = \sigma_i^2$. По методу наименьших квадратов в качестве оценки неизвестной величины x принимается такое X, для которого минимальна сумма квадратов:

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - X)^2,$$

где p_i — так называемые веса измерений. Сумма S достигает минимума, если в качестве X берется среднее взвешенное:

$$\bar{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}.$$

В случае равноточных измерений $y = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$,

$$D(\bar{y}) = \sigma^2/n.$$

Поясним применение метода наименьших квадратов. Пусть в результате эксперимента получены пары значений $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Необходимо построить функцию $Y = f(x)$, наилучшим образом соответствующую экс-

периментальным данным. Из всех функций наилучшим образом соответствует экспериментальным значениям та, для которой сумма квадратов отклонений вычисленных величин от экспериментальных минимальна. Полагая, что искомая функция известна, вычислим $Y_i = f(x_i)$ при всех x. Составим разности, возвысим в квадрат и просуммируем по $i = 1, 2, \ldots, n$. Получим $\sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2$. Эта сумма является функцией параметров, определяющих функцию $Y = f(x)$. Потребуем, чтобы она была минимальна. Тогда частные производные записанной суммы по параметрам функции $f(x)$ должны быть равны нулю [5]. Вычислим их, приравняем нулю и получим нормальную систему линейных уравнений по методу наименьших квадратов для отыскания неизвестных параметров. Решив ее, определим параметры и тем самым построим искомую функцию.

В науке известны случаи, когда одни и те же открытия делались независимо несколькими авторами. Так было с нормальным законом распределения и методом наименьших квадратов.

Малоизвестный американский математик Р. Эдрейн (1775—1845) в 1808 г. опубликовал в американском журнале статью, содержащую два вывода нормального закона распределения вероятностей случайных ошибок и принцип наименьших квадратов.

В 1806 г. А. Лежандр опубликовал мемуар «Новые методы определения орбит комет» и в приложении к нему — «О методе наименьших квадратов». Он писал: «Из всех принципов, которые можно предложить для этой цели, не существует более простого, чем тот, которым мы пользовались в предыдущем изложении: он состоит в том, чтобы обратить в минимум сумму квадратов погрешностей... Способ, который я называю способом наименьших квадратов, сможет, вероятно, принести большую пользу во всех вопросах физики и астрономии, где требуется получить из наблюдений возможно более точные результаты» [9, с. 7—8].

Гаусс обнародовал теорию ошибок и принцип наименьших квадратов годом позже в мемуаре «Теория движения небесных тел, обращающихся около Солнца по коническим орбитам». Он поставил задачу следующего содержания: производятся равноточные измерения, причем одинаковые ошибки принимаются равновероятными. Необходимо определить плотность распределения вероятностей слу-

чайных ошибок, если наиболее вероятное значение измеряемой величины равно среднему арифметическому наблюдаемых значений при любом числе измерений.

Гаусс получил нормальный закон распределения вероятностей случайных ошибок:

$$f(t) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2t^2},$$

где величина h рассматривается как мера точности измерений.

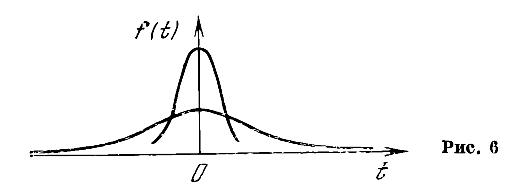


Рис. 6

Как следствие Гаусс указал, что плотность вероятности совокупности результатов наблюдений имеет максимальное значение, когда сумма квадратов отклонений их от истинного значения будет минимальной. Это положение он распространил и на неравноточные измерения.

Гаусс полагал, что сформулированный принцип следует принять как аксиому, точно так же, как и утверждение о том, что среднее арифметическое значение измеряемой величины должно считаться наиболее вероятным значением ее.

Поясним полученный Гауссом закон распределения вероятностей случайных ошибок наблюдений. Будем по горизонтальной оси системы координат откладывать величины ошибок наблюдений и построим кривую распределения ошибок аналогично тому, как это было сделано в случае с интегральной теоремой Лапласа (см. рис. 5). Новую кривую называют кривой Гаусса. Она симметрична относительно вертикальной оси, имеет максимум, когда $t = 0$, и асимптотически приближается к оси Ot. Вероятность того, что ошибка попадет между значениями t_1 и t_2, равна площади, ограниченной кривой, осью Ot и прямыми $t = t_1$ и $t = t_2$.

Кривая Гаусса может быть как крутой, так и пологой, что связано с точностью измерений (рис. 6). В случае высокой точности кривая от максимального значения к оси Ot опускается круто; следовательно, вероятность того,

что ошибки заключаются в узких пределах, значительна. Если кривая Гаусса пологая, о достаточно вероятны большие ошибки.

В мемуаре «Определение точности наблюдений» (1816) Гаусс разработал способ оценки величины h по различным наблюдениям.

Полное изложение теории ошибок приведено Гауссом в большом сочинении «Теория комбинации наблюдений, приводящая к наименьшим ошибкам» (1823). Через три года вышло «Дополнение к теории комбинации наблюдений, приводящей к наименьшим ошибкам».

В «Теории комбинации...» Гаусс упоминает о наличии при измерениях систематических и случайных ошибок и изучает распределение случайных ошибок. Здесь он изложил способ получения нормальных уравнений для линейной функции.

Были у Гаусса и еще работы, связанные с теорией вероятностей, но они не содержали новых методов и результатов.

Следует сказать, что математики того времени придавали очень большое значение нормальному закону распределения и считали возможным применять его к любым массовым явлениям. Было то же, как с «золотым сечением» в архитектуре и искусстве [6].

При изучении теории вероятностей сейчас в некоторых институтах демонстрируют следующий опыт. В нижней части наклонной доски прибиты на одинаковом расстоянии друг от друга вертикальные планки, между которыми образуются гнезда. Вверху доски укреплена воронка, а ниже ее набиты гвозди. (Все это называется доской Гальтона.) В воронку сыплется дробь. Ударяясь о гвозди, дробинки разлетаются в разные стороны и скапливаются в гнездах. В результате опыта верхний край остановившихся дробинок дает кривую Гаусса. Конечно же, это очень эффектно!

7

Развитие вероятностных идей Лапласа и важные открытия прослеживаются в творчестве Пуассона.

Симеон Дени Пуассон родился 21 июня 1781 г. в г. Питивье (департамент Луары). Его отец занимал незначительную чиновническую должность. Сначала он обучал сына сам, дома, предполагая выучить его на нотариуса. Не обнаружив у сына соответствующих способностей, отец отправил мальчика на обучение к цирюльни-

ку. Недолго ему довелось учиться этому ремеслу: хозяин однажды поручил ему вскрыть нарыв на руке ребенка, который на следующий день умер. Мальчик был потрясен и сбежал к отцу.

После Великой французской революции служебное положение отца улучшилось и появилась возможность определить сына в школу. В руки Симеона попали тетради Политехнической школы, и он стал решать находящиеся в них задачи.

Наконец, Пуассон поступил в школу в Фонтенбло. Один из учителей заметил одаренного ученика, стал с ним заниматься и подготовил к экзаменам в Политехническую школу. В числе первых в 1798 г. 17-летний Пуассон поступил в знаменитую школу.

Здесь вскоре проявились его выдающиеся способности. Среди преподавателей, которых довелось слушать Пуассону, был Лаплас. Однажды он задал Пуассону вопрос по небесной механике и получил необычный и изящный ответ. Лаплас сразу же обратил внимание на Пуассона. Его руководителями и вдохновителями к занятиям наукой стали Лаплас, Лагранж, Гаспар Монж и другие знаменитые математики. И успехи Пуассона не заставили долго ждать: в 1800 г. в одном из научных журналов появились два его мемуара. Тогда Пуассону не было и 20 лет.

В 1800 г. Пуассон окончил Политехническую школу и остался при ней репетитором. В 1802 г. он стал адъюнктом, в 1806 г.— профессором Политехнической школы, заменив ушедшего с должности Фурье. В 1812 г. Пуассона избрали членом Парижской Академии наук, с 1816 г. он — профессор рациональной механики Парижского факультета наук, с 1820 г.— наблюдатель за преподаванием математики во всех коллежах Франции. С 1826 г. Пуассон — почетный член Петербургской Академии наук.

При Наполеоне Пуассон получил звание барона, при Луи Филиппе стал пэром Франции.

Круг научных интересов Пуассона необычайно велик. Он провел фундаментальные исследования в математике, в том числе по интегрированию в комплексной области, кратным интегралам, уравнениям в конечных разностях, уравнениям с частными производными, теории вероятностей. Важные достижения получил Пуассон в математической физике, общей и небесной механике, теории упругости, внешней баллистике.

Пуассон написал свыше 300 работ и в этом уступает только Эйлеру и Коши. Его двухтомный «Трактат механики» был одним из лучших учебников по теоретической механике.

В «Большой Советской Энциклопедии» имеется восемь статей, поясняющих термины, носящие имя Пуассона.

Основные достижения Пуассона в теории вероятностей содержит сочинение «Исследования о вероятности приговоров в уголовных и гражданских делах» (1837).

Лаплас, Гаусс и другие математики, пользующиеся понятием случайной величины, связывали ее с результатами измерений. Пуассон попытался ввести ее как общее понятие величины, принимающей различные значения с определенными вероятностями, и дать ей наименование. Он также ввел термин «закон больших чисел» и придавал особое значение различным формам теорем этого класса в познании окружающего мира.

Пуассон обобщил теорему Бернулли на случай повторяющихся испытаний в неодинаковых условиях. Она звучит так: относительная частота события при большом числе испытаний в переменных условиях сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей его в этих испытаниях.

Пуассон воспользовался этой теоремой для анализа модели избирательной системы во Франции. Сделав некоторые предположения, он пришел к выводу, что «представительное правительство есть просто обман» [36, с. 202].

По мысли Пуассона, доказанная им теорема носит всеобщий характер; он применил ее к определению верности решений судов, к различным решениям людей. Им получены формулы, позволяющие определять вероятность каждого человека быть обвиненным, осужденным или оправданным.

Известно, что когда число n испытаний Бернулли велико, формула Бернулли становится непригодной и рекомендуется для подсчета вероятностей пользоваться локальной теоремой Лапласа.

Но в случаях малых вероятностей ($p \leqslant 0{,}1$) и эта теорема приводит к значительным погрешностям.

Пуассон получил асимптотическую формулу для подсчета вероятности появления k событий в n испытаниях, когда вероятности малы:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$, p — вероятность появления события в каждом опыте.

Ее можно вывести предельным переходом из формулы Бернулли, устремив n к бесконечности.

Польский статистик В. Борткевич (1868—1931) применил формулу Пуассона к таким редким событиям, как смерть от удара лошади копытом в кавалерийских частях, рождение троен и др.

Распределение случайной величины X (числа появлений событий в n испытаниях), если вероятность события $X = k$ вычисляется по формуле Пуассона и называется распределением Пуассона. Оно — одно из важнейших в теории вероятностей. Распределение Пуассона описывает, например, радиоактивный распад, космические лучи, частоту аварий на нефтепроводе.

В настоящее время в теории вероятностей есть понятие потока событий. Это последовательность событий в случайные интервалы времени. Поток событий образуют, например, вызовы, поступающие на пункт скорой помощи. Если поток событий удовлетворяет некоторым требованиям, то он называется простейшим, или пуассоновским. Вероятность того, что за время t появится k событий в простейшем потоке, вычисляется по формуле Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

В одной из работ Пуассон определил распределение случайной величины, вошедшее в науку как «распределение Коши».

По-разному встретили математики «Исследования о вероятности...» Пуассона. Крайности в применении вероятностных методов к некоторым видам человеческой деятельности получили резкое осуждение со стороны тех, кто считал, что это компрометирует науку. Секция математики Парижской Академии наук определила вычисления Пуассона как ложные. Критика задевала и Лапласа. Но многие поддерживали Пуассона. Известный русский математик В. Я. Буняковский, например, писал, что в книге «статистики и законоведы найдут глубокомысленные применения математического анализа к разным вопросам, касающимся судопроизводства по гражданским и уголовным делам. Формулы Пуассона заключают в себе две величины, которые зависят от нравственного состояния страны, от состава суда и вида судопроизводства, а также от образованности и искусства судей» [6, с. 46].

Таким образом, если попытаться подвести некоторые итоги, то они противоречивы. С одной стороны, Пуассон получил существенные теоретические результаты, имеющие широкие практические приложения, с другой — он неправомерно пытался применять вероятностные методы к «моральным» вопросам; вследствие этого в науке появилось недоверие к теории вероятностей, ее перестали считать математической дисциплиной.

8

Так же, как и у Гаусса, проблемы теории вероятностей не лежали в русле основных научных интересов Коши. Однако и здесь он выполнил фундаментальные исследования.

Творчество Коши протекало в то время, когда в общественной жизни и естествознании произошли существенные изменения. Возросла роль математики в системе наук. В связи с тем, что она приобрела аналитический характер, математические методы проникали не только в механику, с которой математика была в тесном контакте еще во времена Архимеда, но и физику, технику и экономику. Лагранж в «Аналитической механике» писал, что «механика становится новой отраслью анализа»; Л. Карно в «Размышлениях о метафизике исчисления бесконечно малых» подчеркивал: «Ни одно другое открытие не доставило более простых и более действенных средств для проникновения в познание законов природы»; Фурье в «Аналитической теории тепла» утверждал: «Математический анализ столь же обширен, как и сама природа...»

Расширилась сеть учебных заведений, готовящих специалистов, стало больше университетов, высших технических школ; профессора университетов стали заниматься научными исследованиями, академики — преподавать в университетах. Увеличилось количество периодических научных изданий, что предоставило более широкую возможность публикации работ; улучшилась информативность.

С развитием математики возникла тенденция к специализации, математика стала подразделяться на чистую и прикладную. Чистая математика была более абстрактной. Это вело к совершенствованию основных понятий, к разрешению на более высоком уровне проблемы обоснования анализа. Прикладная математика все глубже вторгалась в технику, гидромеханику, теорию машин и механизмов.

9

Огюстен Луи Коши родился 21 августа 1789 г. в Париже в семье видного чиновника. Его отец был ревностный католик и роялист. Вначале с Коши занимался отец, прекрасный лингвист, а в 1805 г. Огюстен поступил в Политехническую школу, затем, в 1807 г.,— в Школу мостов и дорог, которую и окончил в 1810 г. Лагранж отметил выдающиеся математические способности юноши и предсказал ему блестящую будущность.

После окончания школы Коши получил ответственное поручение по постройке военного порта в Шербуре. Здесь в 1811 г. он написал свой первый мемуар о многогранниках, где разрешил некоторые вопросы, не поддававшиеся усилиям первоклассных математиков. Затем провел исследования по теории многогранников, о симметрических функциях, алгебраических уравнениях, по теории чисел. В 1816 г. Коши представил на конкурс Парижской Академии наук работу по теории волн на поверхности тяжелой жидкости и получил премию. В этом же году Коши был назначен правительством членом Института Франции [7] на место исключенного Г. Монжа.

Тогда же началась интенсивная преподавательская деятельность Коши: с 1816 г. он — профессор Политехнической школы, в 1816—1830 гг.— Сорбонны, в 1848—1857 гг.— Коллеж де Франс. Им написаны «Курс анализа» (1821), «Резюме лекций, прочитанных в Королевской политехнической школе» (1823), «Лекции о приложении анализа к геометрии» (1826—1828). Книги Коши долгое время были образцом для курсов анализа. В 1831 г. в Петербурге издано «Краткое изложение дифференциального и интегрального исчисления» Коши в переводе Буняковского.

Революция 1830 г. и изгнание Карла X резко изменили судьбу Коши: не считая возможным нарушить присягу Карлу X, он отказался присягнуть правительству Луи Филиппа, потерял должность и вынужден был покинуть Францию. Некоторое время он провел в Швейцарии, затем получил место в Туринском университете на кафедре математической физики. Карл X, поселившийся в Праге, пригласил Коши в 1832 г. в качестве учителя и воспитателя сына. Коши несколько лет путешествовал с ним по Европе. Так было до 1838 г.

Коши предлагали различные должности, но он отказывался от них, руководствуясь своими католическими и роялистскими убеждениями. Во Францию и в Институт

он вернулся в 1838 г. В 1848 г. Коши получил кафедру математики в Коллеж де Франс, где и проработал до самой смерти. Он умер 22 мая 1857 г.

Коши сделал первостепенные открытия в анализе, теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений, теории рядов, теории чисел, математической физике, теории упругости, теоретической механике, небесной механике, гидродинамике, оптике; не обошел он своим вниманием и теорию вероятностей.

Работоспособность Коши поразительна: иногда он каждую неделю представлял академии новый мемуар. Всего Коши написал около 700 работ, не считая сочинений политического и религиозного содержания. Он был членом почти всех академий наук.

10

По интересующей нас теме Коши опубликовал несколько мемуаров, связанных в основном с обработкой результатов наблюдений; восемь из них вошли в 12-й том его Полного собрания сочинений (1900). Он вел дискуссии с И. Ж. Бьенэме (1796—1878) по поводу метода наименьших квадратов, и это стимулировало часть исследований.

В мемуаре «О наибольшей ошибке, которой следует опасаться в среднем результате и о системе множителей, которые приводят эту наибольшую ошибку к минимуму» (1853) Коши установил, что максимум линейной функции n неотрицательных переменных, подчиняющихся m линейным уравнениям, будет, когда $n - m$ этих переменных обращаются в нуль. Такая теорема теперь фигурирует в линейном программировании.

В мемуаре «О средних результатах наблюдений одной и той же природы и о наиболее вероятных результатах» (1853) рассмотрена задача отыскания плотности распределения погрешностей наблюдений. В частных случаях из найденного общего результата Коши получил нормальное распределение и распределение, названное его именем. Распределение Коши обладает тем свойством, что если наблюдения имеют такое распределение, то их среднее арифметическое будет также подчинено этому распределению.

Вслед за Лапласом и Пуассоном Коши применял в теории вероятностей разрывные множители [8]. В двух работах 1853 г. он доказал центральную предельную теорему.

11

Как уже отмечалось, параллельно с развитием теории вероятностей шла вперед статистика народонаселения.

Во Франции в 1800 г. создано Генеральное бюро статистики. Оно было упразднено в 1812 г. и восстановлено в 1833 г. Предпринята первая попытка переписи населения Франции. В 1832 г. в Британской ассоциации содействия науке учреждена статистическая секция с постоянным комитетом при ней, который возглавлял Ч. Бэббедж — конструктор прообраза ЭВМ. С 1834 г. функционирует Лондонское статистическое общество. В 1839 г. такое же общество организовано в Америке. В России примерно с 1809 г. статистикой народонаселения по разным губерниям занималось Вольное экономическое общество, а с 1845 г.— Русское географическое общество. Статистическое бюро в Пруссии создано в 1810 г. Статистическая служба в Австрии действует с 1840 г.

Большую роль в постановке работ по статистике народонаселения сыграл бельгийский ученый А. Кетле (1796—1874), возглавлявший центральную статистическую комиссию в Бельгии и организовавший первый Международный статистический конгресс. Такие конгрессы проводятся с 1851 г. с целью согласования статистических данных по разным странам. Они способствовали также принятию метрической системы мер, ставшей международной лишь в 1875 г.

В своих работах Кетле описывал статистическую обработку данных о росте человека, о связи роста и веса и т. д. Он считал, что вытекающие отсюда выводы могут понадобиться не только для изучения человека вообще, но и в судебной медицине.

Кетле придерживался взглядов Лапласа и Пуассона и полагал, что законы, регулирующие деятельность человеческого общества, носят вероятностный характер. Он выражал, например, вероятностями склонность человека к браку, преступлению.

Особое место в учении Кетле занимало употреблявшееся еще Бюффоном понятие среднего человека. Цель статистики состоит, по мнению Кетле, в выяснении его характера, особенностей. Он утверждал, что свойства среднего человека неизменны, а отдельные индивидуальности — отклонения от него.

Ж. Бертран в «Исчислении вероятности» иронизировал по поводу среднего человека: «В тело среднего человека бельгийский автор вложил среднюю душу». Такой чело-

век «лишен страстей и пороков, он ни безумен, ни мудр, ни невежда, ни ученый... (он) зауряден во всем. После того как он съедает в течение тридцати восьми лет средний паек здорового солдата, ему положено умереть не от старости, а от средней болезни, которую обнаруживает в нем статистика» [36, с. 210].

И все же деятельность Кетле дала значительный импульс развитию статистики народонаселения.

Попытку дать глубокое философское объяснение понятия вероятности предпринял французский статистик, экономист, философ и историк О. Курно. В 1843 г. вышла его книга «Основы теории шансов и вероятностей», в которой обсуждаются различные вопросы теории вероятностей и статистики.

Эпиграфом к книге Курно поставил слова Гюйгенса: «Кажется, что чем меньше могут быть постигнуты в пределах научного знания случайное и неопределенное, тем более удивительной представляется теория, которой они все же подчиняются».

Курно выделяет объективную и субъективную вероятности, математическую, геометрическую, абсолютную и относительную вероятности, физические возможность и невозможность; математическая вероятность у него «становится мерой физической возможности». Одно это перечисление наводит на мысль, что ясности в вероятностных вопросах Курно не достигает.

12

Подведем теперь некоторые итоги. Время, в которое творили Лаплас, Гаусс, Пуассон, Коши, иногда называют героическим периодом в развитии теории вероятностей, когда выдающиеся исследователи торопились высказать накопившиеся у них идеи, порой не подкрепленные достаточно строгими аналитическими методами, и допускали ошибки. Может быть, все еще витал в воздухе девиз Д'Аламбера: «Шагай вперед, уверенность потом придет».

Сложившаяся ситуация характеризуется тем, что увлечение теорией вероятностей в начале века повлекло за собой большое количество исследований, посвященных приложениям теории к различным проблемам естествознания и общественной жизни. Многие такие совершенно не обоснованные применения компрометировали науку. Это привело к тому, что увлечение теорией вероятностей сменилось разочарованием и неуверенностью в возможности пользоваться ею. Некоторые математики Западной Евро-

пы стали смотреть на нее как на развлечение, считали ее не заслуживающей внимания.

Развитие теории вероятностей настоятельно требовало уточнения ее основных положений, установления области применимости ее методов, дальнейшей разработки специфических вероятностных методов исследования.

Лаплас, Пуассон, Коши, Гаусс гениально предвидели ценность принципиально новых научных идей и направлений теории, но потребовалось значительное время и гениальность нового поколения ученых, в первую очередь П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, А. М. Ляпунова, чтобы внутреннюю убежденность в широте и глубине положений теории подтвердить стройными математическими формулировками и доказательствами.

Образно говоря, предшественники как бы бросили семена теории в благодатную почву, и требовалось время для прорастания и развития их, чтобы можно было воспользоваться результатами в объяснении математическими методами закономерностей окружающего мира и проведения исследований на пользу человеку.

И нет ничего удивительного в том, что наряду с фундаментальными направлениями совершались попытки применения нового аппарата в тех областях науки и практической деятельности, где теория вероятностей неприменима.

Пересмотр основ

1

Построение теории вероятностей в основном было завершено во второй половине XIX в. Конечно, это не означает, что теория вероятностей достигла уровня, когда развитие прекращается. С наукой, как и со всем на Земле, так не бывает. Просто произошел пересмотр первооснов, и теория вероятностей получила первые мощные импульсы для интенсивного прогресса и расширения сфер своих приложений в других науках и практической деятельности.

В развитии теории вероятностей усматриваются четыре периода. Первый связан в основном с творчеством Паскаля, Ферма и Якоба Бернулли. Он характеризуется становлением понятий, теорем, созданием аппарата для решения задач. Несмотря на элементарность построений и методов, этот период называют «философским». В то время осуществлялось оформление математического естествознания. Необходимо было уяснить возможности и всеобщность математического метода для установления связей между различными явлениями. Математики убеждались, что разработанный ими универсальный аппарат дифференциальных уравнений применим только к детерминистски определяемым процессам. Там же, где необходим другой подход, требовались новые понятия и соответствующий математический аппарат.

Было замечено, что среди неподдающихся учету большого количества явлений наблюдаются четкие закономерности «в среднем». Вот здесь-то и проступает «натурфилософская роль теории вероятностей». Именно это привлекло внимание Паскаля и других великих математиков к теории вероятностей, а не «прикладные» задачи кавалера де Мере.

Второй период — XVIII в. и начало XIX в. Здесь основной вклад в теорию вероятностей внесли Муавр, Лаплас, Пуассон и Гаусс. Период характеризуется тем, что от элементарных теорем, связанных с конечным числом

событий, совершен переход к предельным теоремам. Появились естественнонаучные области для приложения вероятностного аппарата — теория ошибок и баллистика.

Третий период составляет вторая половина XIX в. В это время в Западной Европе происходит бурное развитие математической статистики и статистической физики, но идет оно на примитивном теоретическом фундаменте. «Центром же исследований по основным общим проблемам теории вероятностей становится Петербург,— считает А. Н. Колмогоров.— Вывел русскую теорию вероятностей на первое место в мире Пафнутий Львович Чебышев». Его исследование существенно развили А. А. Марков и А. М. Ляпунов.

По мнению Колмогорова, сложившееся состояние выглядит так. В течение второго периода «... общие теоретические исследования в Западной Европе находились в известном загоне, начинавшая развиваться математическая статистика... в части теоретико-вероятностного аппарата обходилась результатами предыдущего периода, а новые потребности статистической физики еще не нашли достаточного отражения в общих работах по теории вероятностей. Тем временем в России, почти исключительно силами упомянутых трех знаменитых русских математиков, вся система теории вероятностей была перестроена, расширена и углублена» [25, с. 54].

Четвертый период в развитии теории вероятностей — это начало XX в. Он характеризуется возбуждением интереса к теории вероятностей во всех странах и глубоким проникновением вероятностных методов в специальные области естествознания, технические и общественные науки.

Советские исследователи в теории вероятностей занимают значительное место, «а в общих проблемах самой теории вероятностей... даже первое» [25, с. 54].

2

Как попали идеи теории вероятностей на русскую почву?

Преподавание теории вероятностей в России впервые введено в Вильнюсском университете в 1829 г. в виде факультативного курса под влиянием профессора И. А. Снядецкого (1756—1830). Первая университетская кафедра теории вероятностей учреждена здесь же в 1830 г. Курс читал магистр, а затем профессор З. Ревковский [1]. Он же стал заведующим кафедрой и написал не дошедшее до нас сочинение по теории вероятностей. Однако сохранилась

программа читаемого им курса. Она была направлена Академией наук на отзыв М. В. Остроградскому, который отозвался о ней хорошо и высказал пожелание ввести преподавание теории вероятностей во всех университетах страны и гимназиях.

В своем заключении Остроградский писал: «Наука вероятностей есть одно из важнейших приспособлений математического анализа: философия природы обязана ей многими методами, посредством коих из великого числа наблюдений определяются элементы, на коих основаны важнейшие астрономические теории; она подала повод к тем полезным общественным заведениям, известным нам под именем страховых компаний; посредством ее усматриваем мы существование причин, имеющих действия меньше, нежели самые погрешности, при наблюдениях встречающиеся. С каждым днем увеличивается влияние сей отрасли анализа, приспособляемой ныне и к самим политическим и нравственным наукам» [39, с. 277].

В 1837 г. в Петербургском университете стал читать лекции по теории вероятностей В. А. Анкудович; с 1850 по 1860 г. читал В. Я. Буняковский. В Московском университете с 1850 г. такие лекции читал А. Ю. Давидов. Им опубликованы несколько статей о применении теории вероятностей.

Великий русский математик Н. И. Лобачевский посвятил проблемам, связанным с теорией вероятностей, две статьи. По результатам инструментальных наблюдений он высчитал отклонение от двух прямых суммы углов треугольника Земля — Солнце — Сириус. Оно оказалось очень малым, поэтому естественно возник вопрос об оценке ошибок наблюдения. Лобачевский указал, что при наблюдениях возникают ошибки противоположных знаков и что они обусловлены неточностью приборов и их установки.

Лобачевский решил две задачи: нашел распределение суммы независимых случайных величин, каждая из которых принимает значения между $-a$ и a с вероятностью $1/(2a+1)$, а также получил распределение среднего арифметического взаимно независимых случайных величин, равномерно распределенных на интервале $[-1;\ 1]$.

На торжественном заседании Московского университета 29 июня 1841 г. профессор Н. Д. Брашман (1796—1866) высказал необходимость преподавания теории вероятностей в университетах. Через два года профессор Н. Е. Зернов (1804—1862) произнес также на торжест-

венном заседании Московского университета речь «Теория вероятностей с приложением преимущественно к смертности и страхованию». В том же году она в расширенном виде вышла отдельной книгой. В ней изложены основные понятия и элементарные теоремы теории вероятностей, вопросы, связанные с демографией, статистикой и страхованием, а также теория ошибок и применение теории вероятностей к судопроизводству.

Особо важная роль в распространении теории вероятностей в России принадлежит академику Петербургской Академии наук, ее вице-президенту в 1864—1889 гг. В. Я. Буняковскому.

Буняковский написал первое руководство по теории вероятностей в России — «Основания математической теории вероятностей». Он поставил цель более просто изложить выводы и построения Лапласа и Пуассона и объяснить полученные ими результаты, а также выработать русскую терминологию. Во введении к книге он подчеркнул, что в России до сих пор нет подробного изложения содержания теории вероятностей и ее приложений; отсутствие переводов соответствующих сочинений выдвигает перед ним трудность «писать на русском языке о предмете, для которого мы не имели установленных употреблением оборотов и выражений».

Изложение теории в книге сопровождается разобранными примерами и задачами, применяемая терминология во многом сохранилась до наших дней. Однако Буняковский допускал применение вероятностных методов даже к явлениям, о которых ничего не известно, и в специальной главе (более 50 страниц) обсуждал приложение теории вероятностей к оценке свидетельских показаний, правильности решений судей, к различного рода выборам. Против этих идей Буняковского и его попытки оградить от нападок религиозные предания резко выступал А. А. Марков.

Несколько работ Буняковского посвящены демографии: он исследовал возрастной состав населения России, смертность, возможные армейские контингенты. Эти работы сыграли большую роль в развитии в России страхового дела и становления статистики народонаселения. Заметим, что Буняковский с 1858 г. был главным правительственным экспертом по статистике и страховому делу.

Оригинальна работа Буняковского, в которой высказана идея возможности приложения теории вероятностей «к грамматическим и этимологическим исследованиям о каком-либо языке, также к сравнительной филологии» [2].

Теории вероятностей уделил внимание в своем творчестве М. В. Остроградский (1801—1862). Он, так же как и Буняковский, интересовался прежде всего практическими задачами.

После поражения в 1856 г. в Крымской войне Россия была лишена возможности держать флот на Черном море, предстояли увольнения матросов и служащих. С целью улучшения материального положения уволенных было решено учредить эмеритальные кассы [3]. В организации касс приняли участие Буняковский и Остроградский, вошедшие в соответствующую комиссию.

В 1868 г. Остроградский опубликовал «Записку об эмеритальной кассе», содержащую расчеты величины пенсии в различных случаях и таблицы. Ими продолжительное время пользовались в практике страхования.

Следуя Лапласу, Остроградский применял теорию вероятностей к судопроизводству и опубликовал статью о вероятности судебных ошибок.

В одной из работ Остроградский обсуждал применение теории вероятностей к контролю качества продукции.

В неоконченной статье «О страховании» он высказал критические замечания по поводу книги Буняковского и обсуждал методологическую сторону теории вероятностей. В 1858 г. Остроградский прочитал в Артиллерийской академии курс лекций по теории вероятностей.

Как видим, творчество Буняковского и Остроградского целиком лежало в русле классических воззрений Лапласа и Пуассона и не могло способствовать выходу теории вероятностей из возникших затруднений.

3

Теперь на наших страницах появляется П. Л. Чебышев.

Пафнутий Львович Чебышев родился 16 мая 1821 г. в селе Окатово Боровского уезда Калужской губернии. Его отец принадлежал к старинной дворянской фамилии и был достаточно образованным человеком. Он неоднократно избирался уездным предводителем, а в последние годы жизни участвовал в работе по подготовке и проведению реформы 1861 г.

У Чебышевых было 9 детей: 5 сыновей и 4 дочери, старший сын — Пафнутий. Начальное образование Пафнутий получил дома: грамоте обучался у матери, арифметике, французскому языку и музыке — у двоюродной сестры, память о которой сохранил на всю жизнь.

Родители намеревались дать старшим сыновьям, Пафнутию и Павлу, университетское образование, и в 1832 г. семья Чебышевых переехала в Москву. Для подготовки детей были приглашены лучшие учителя. Математикой занимался магистр университета, автор распространенного учебника П. Н. Погорельский.

В 1837 г. 16-летним юношей Пафнутий поступил на физико-математическое отделение философского факультета Московского университета. Кроме обязательных на всех факультетах богословия, церковного права, церковной истории и естественных наук, на физико-математическом отделении изучались высшая алгебра, аналитическая геометрия, анализ, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление. С третьего курса студенты специализировались либо по математическим, либо по естественным наукам; анатомию, зоологию и ботанику продолжали изучать все.

Чебышев слушал лекции по чистой математике у профессора Н. Е. Зернова. Квалификацию Зернова в некоторой степени характеризует то, что он первый в России защитил диссертацию на соискание степени доктора математических наук. У Зернова Чебышев получил прочные знания основ математики, позволяющие вести самостоятельные исследования.

Однако первое место среди учителей Чебышева принадлежит учебнику Лобачевского профессору Н. Д. Брашману, читавшему механику и гидродинамику. Брашман заметил одаренного юношу и стал руководить его занятиями. Чебышев сохранил благодарную память о Брашмане и впоследствии сообщал ему о своих работах.

На четвертом курсе Чебышев написал сочинение «Вычисление корней уравнений», удостоенное серебряной медали.

В 1841 г. Чебышев закончил полный курс университета и принял решение посвятить себя научной работе. Он начал сдавать магистерские экзамены и сел писать диссертацию «Опыт элементарного доказательства анализа теории вероятностей», успешно защищенную в 1846 г. [4]

В эти годы Чебышев много работает и публикует статьи: в 1843 г. в журнале французского математика Ж. Лиувилля вышла «Заметка об одном классе кратных определенных интегралов», на следующий год в немецком журнале А. Крелле — «Заметка о сходимости ряда Тѐйлора» и затем «Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей» (1846).

Исследователи творчества Чебышева отмечают влияние

на его научные интересы Брашмана, подчеркивавшего в своих лекциях по теоретической механике важность ее практических, технических приложений. Чебышев сам говорил об этом в одной статье в форме письма Брашману. Это влияние отразилось в дальнейшем в исключительном интересе, проявленном Чебышевым к прикладной механике.

После переезда в Петербург Чебышев представил в университет диссертацию «Об интегрировании с помощью логарифмов» на право чтения лекций. Она послужила началом исследований в этом направлении, которые продолжались 20 лет. Аналогичными проблемами занимались Абель, Лиувилль, Остроградский, Брашман, Сомов.

Чебышев защитил диссертацию, получил место адъюнкта и с сентября начал чтение лекций по алгебре и теории чисел. И началась продолжающаяся 35 лет интенсивная преподавательская деятельность Чебышева в Петербургском университете. В разное время ему приходилось читать высшую алгебру, теорию чисел, аналитическую геометрию, интегральное исчисление, теорию вероятностей (после ухода в 1860 г. Буняковского в отставку), теорию конечных разностей.

Докторская диссертация Чебышева «Теория сравнений», защищенная в 1849 г., была продолжительное время единственным руководством по теории чисел. Академия наук удостоила «Теорию сравнений» Демидовской премии [5]. В 1850 г. Чебышев стал экстраординарным, а с 1860 г. ординарным профессором Петербургского университета. Несколько лет он преподавал практическую механику в Александровском лицее.

Чебышев был выдающимся педагогом. Его курсы отличались краткостью, но насыщенностью и доступностью. А. А. Марков и Н. Я. Сонин характеризовали Чебышева-лектора так. Он отличался пунктуальностью, лекции не пропускал, на них не опаздывал, после звонка в аудитории не задерживался. Если начатое доказательство закончить на лекции не успевал, то на следующей начинал вновь. Прежде чем делать сложные выкладки, разъяснял в общих чертах их цели и ход рассуждений, после чего выполнял запись на доске, зачастую молча, «предоставляя студентам следить за ним глазами, а не ухом».

На лекциях часто делал отступления, высказывал взгляды свои и других математиков по поводу того или иного раздела курса, устанавливал его роль и место в науке. Такие экскурсы оживляли изложение и развивали интерес к предмету.

Когда Чебышев пришел в Петербургский университет, кафедру чистой математики занимал Буняковский, экстраординарным профессором прикладной математики был Сомов; Чебышев сблизился с ними. Буняковский и Чебышев стали готовить к изданию опубликованные и оставшиеся в рукописях труды Эйлера по теории чисел; вышли в свет два тома с систематическим указателем и аннотациями статей. Эта работа, помимо докторской диссертации, также возбуждала интерес Чебышева к теории чисел. Вскоре вышел знаменитый мемуар его «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» (1851) и как продолжение статья «О простых числах» (1852).

В июне — ноябре 1852 г. Чебышев побывал в заграничной командировке (Германия, Англия, Франция). Поразительно много удалось ему сделать всего за шесть месяцев. Он посещал и осматривал металлургические заводы, лаборатории, технические музеи, мастерские, железные дороги, знакомился с работой гидравлических колес, турбин, паровых, льнопрядильных и других машин, встречался и обсуждал научные проблемы с выдающимися математиками: Коши, Лиувиллем, Эрмитом, Бьенэме, Серре, Лебегом и др. Там же Чебышев подготовил мемуар «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов».

В 1853 г. в журнале Лиувилля напечатана статья Чебышева «Об интегрировании иррациональных дифференциалов». Одновременно он приступил к разработке двух новых областей — теории механизмов и теории наилучшего приближения функций; его публикации по этим вопросам составляют $^2/_3$ всех работ и продолжались с 1854 г. в течение 40 лет. Теория наилучшего приближения функций охватила широкий круг вопросов: теорию ортогональных многочленов, теорию моментов, непрерывных дробей, оценки интегралов, квадратурные формулы, интерполирование и т. д. В конце 1855 г. Чебышев начал исследования в Артиллерийском отделении Военно-ученого комитета; в 1856 г. он стал членом Ученого комитета Министерства народного просвещения, где много занимался улучшением постановки преподавания математики.

В середине шестидесятых годов Чебышев вновь обратился к проблемам теории вероятностей. В 1867 г. вышла его работа «О средних величинах», содержащая обобщение закона больших чисел. Статья «О двух теоремах теории вероятностей» (1887) посвящена центральной предельной теореме.

Интенсивная научная работа Чебышева, его открытия быстро принесли ему славу на родине и в Европе: в 1853 г. его избрали адъюнктом Петербургской Академии наук, в 1856 г.— ординарным академиком. С 1860 г. Чебышев член-корреспондент Парижской Академии наук, с 1874 г.— иностранный член ее, в 1871 г. его избрали членом Берлинской академии наук, в 1873 г.— Болонской Академии наук, в 1877 г.— Лондонского Королевского общества, в 1893 г.— Шведской Академии наук. Он состоял почетным членом почти всех русских университетов и Артиллерийской академии. Президент Франции в 1855 г. наградил Чебышева офицерским знаком ордена Почетного легиона; в 1890 г. Чебышев получил командорский крест этого ордена.

Описание заслуг Чебышева перед русской и мировой наукой не будет полным, если не отметить его выдающуюся роль в создании Петербургской математической школы. Его учениками были А. А. Марков, А. М. Ляпунов, А. Н. Коркин, Ю. В. Сохоцкий, Е. И. Золотарев, И. Л. Птащицкий, И. И. Иванов, К. А. Поссе, Д. А. Граве, Г. Ф. Вороной, А. В. Васильев и др. Все они проводили исследования под непосредственным воздействием Чебышева, а иногда и продолжали разработку его тематики. Они распространяли идеи учителя среди университетов и других высших школ Петербурга, Казани, Киева, Харькова, Варшавы. Петербургская математическая школа характеризовалась не только единством тематики, но и общим взглядом на науку; она ценна практическими приложениями. Об этом качестве науки Чебышев говорил неоднократно.

Он вообще придавал большое значение практике, применению достижений теории к решению повседневных задач. Об этом говорят, например, его известные слова о том, что в древности задачи ставили боги (делосская задача об удвоении куба)[6], затем полубоги (Паскаль и Ферма), а теперь их ставит нужда.

Чебышев много изобретал. Известны его центробежный регулятор, многозвенный механизм кулисы паровой машины, арифмометр, стопоходящая машина, дамский велосипед — самокатное кресло; всего сорок оригинальных конструкций механизмов и более семидесяти их вариаций. Стены столовой квартиры Чебышева были заполнены моделями придуманных им механизмов. Изобретения Чебышева экспонировались на отечественных и зарубежных выставках и отмечались дипломами.

Характерен для Чебышева исключительный дар выбирать актуальные задачи и предлагать их для решения ученикам. Перед А. М. Ляпуновым он поставил задачу исследовать устойчивость вращающейся жидкой массы. Ляпунов занимался ею всю жизнь и сделал свои великие открытия.

Раз в неделю квартира Чебышева была открыта для всех, кто желал получить у него квалифицированную консультацию, совет, а иногда и материальную поддержку.

При жизни в Москве и в первое время в Петербурге Чебышев испытал значительные материальные затруднения. В последующем он вел достаточно скромную жизнь, хотя был гостеприимен, тратил деньги на изготовление придуманных механизмов, на поездки в каникулярное время за границу, где выступал с докладами, на помощь нуждающимся. Так, он в числе других участвовал в оказании финансовой поддержки конструктору самолета А. М. Можайскому, когда специальная комиссия отказала ему в средствах на постройку самолета.

Чебышев в совершенстве владел французским языком; говорил, что свои мемуары сначала обдумывает по-французски, а потом составляет на русском языке. При обсуждении научных проблем зачастую переходил на французский.

Ни одной даты своей творческой деятельности Чебышев не отмечал и всячески препятствовал, когда кто-либо, как принято, пытался организовать торжество. За заслуги в науке и преподавании он получил более 10 орденов и никогда не упоминал об этом.

Умер П. Л. Чебышев скоропостижно 8 декабря 1894 г. от паралича сердца. Перед этим он заболел гриппом, но оставался на ногах, хотя и чувствовал недомогание. Накануне днем принимал Д. А. Граве и предложил ему сделать обобщение своей теоремы о спрямлении дуги плоской кривой на случай кривой двоякой кривизны.

6

По теории вероятностей П. Л. Чебышев написал всего четыре статьи, но они были основополагающими для этой науки.

В магистерской диссертации «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» он сформулировал цели предпринятых им усилий и указал, что намерен дать изложение теории вероятностей простым и доступным учащимся способом, «без посредства трансцендентного ана-

лиза». В работе дано классическое определение вероятности, определен предмет теории вероятностей, изложены основные теоремы, выведены формула Бернулли, формула Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$, с ее помощью преобразована формула Бернулли

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k (1-p)^{n-k}$$

к виду

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}}\, e^{-\frac{z^2}{2p(1-p)n}},$$

где $k = pn + z$.

Затем найдена вероятность того, что событие при n испытаниях произойдет не менее k раз и не более $k + s$ раз и доказана теорема Бернулли. При этом получен очень важный результат: установлены пределы погрешностей при пользовании теоремой Бернулли. Уже здесь обнаруживается общая тенденция, характеризующая творчество Чебышева при доказательстве предельных теорем: давать оценку приближений, доставляемых предельными теоремами, над чем его предшественники не задумывались. Тем самым и в теорию вероятностей Чебышев ввел «инженерный» подход, наблюдаемый в его научных работах.

В магистерской диссертации Чебышев доказал также теорему Пуассона для частного случая. Полное доказательство теоремы Пуассона содержится в работе «Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей» (1848). Чебышев писал: «Предметом этой заметки будет доказательство следующего предложения: можно всегда назначить столь большое число испытаний, при котором будет сколь угодно близка к достоверности вероятность того, что отношение числа повторений некоторого события E к числу испытаний не уклонится от средней арифметической вероятностей события E свыше данных пределов, как бы ни были тесны эти пределы.

Это основное предложение теории вероятностей, заключающее как частный случай закон Якова Бернулли, было выведено г. Пуассоном... Однако, как ни остроумен способ, употребленный знаменитым геометром, он не доставляет предела погрешности, которую допускает этот приближенный анализ, и вследствие такой неизвестной величины погрешности доказательство не имеет подлежащей строгости» [53, с. 14].

Чебышев нашел оценку, позволяющую применять теорему Пуассона на практике. Однако был и недостаток: ни Пуассон, ни Чебышев не оговаривали независимость случайных величин, а Пуассон ошибочно применял доказанную теорему к зависимым событиям.

В работе «О средних величинах», опубликованной в 1867 г. в «Математическом сборнике» и журнале Лиувилля, Чебышев установил носящее его имя неравенство и применял это неравенство к доказательству теоремы, из которой как следствия получаются теоремы Бернулли и Пуассона.

Выведем неравенство Чебышева, например, для дискретных случайных величин. Дисперсия дискретной случайной величины будет

$$D_x = \sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^2 p_k.$$

Все слагаемые записанной суммы положительны. Если отбросить в ней те, для которых $|x_k - m_x| < \varepsilon$, то она уменьшится. Запишем

$$D_x \geqslant \sum_{|x_i - m_x| \geqslant \varepsilon} (x_i - m_x)^2 p_i.$$

Здесь $|x_i - m_x| \geqslant \varepsilon$ означает, что суммирование производится по тем значениям i, для которых x_i отклоняется от m_x на величину не меньше ε.

Заменим теперь в сумме выражение $|x_i - m_x|$ через ε. От этого сумма, очевидно, может только уменьшиться. Следовательно,

$$D_x \geqslant \sum_{|x_i - m_x| \geqslant \varepsilon} \varepsilon^2 p_i = \varepsilon^2 \sum_{|x_i - m_x| \geqslant \varepsilon} p_i.$$

Но

$$\sum_{|x_i - m_x| \geqslant \varepsilon} p_i = P(|X - m_x| \geqslant \varepsilon),$$

поскольку величины p_i относятся лишь к тем значениям x_i, которые отклоняются от математического ожидания на величину, не меньшую ε.

Значит, $D_x \geqslant \varepsilon^2 P(|X - m_x| \geqslant \varepsilon)$, откуда

$$P(|X - m_x| \geqslant \varepsilon) \leqslant D_x/\varepsilon^2,$$

$$P(|X - m_x| < \varepsilon) \geqslant 1 - D_x/\varepsilon^2.$$

Последние две формы и представляют неравенство Чебышева. Аналогично доказывается оно и для непрерывных случайных величин, когда

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\, dx.$$

Свою теорему Чебышев сформулировал так: «Если математические ожидания величин u_1, u_2, u_3, . . ., u_1^2, u_2^2, u_3^2, . . . не превосходят какого-либо конечного предела, то вероятность, что среднее арифметическое N таких величин от среднего арифметического их математических ожиданий разнится менее чем на какую-нибудь данную величину, с возрастанием числа N до ∞ приводится к единице» [53, с. 436].

В настоящее время теорему Чебышева формулируют так: при неограниченном увеличении числа независимых испытаний над случайными величинами, имеющими ограниченные дисперсии, среднее арифметическое наблюдаемых случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i/n - \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}/n\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Докажем теорему. Введем случайную величину

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i/n.$$

Найдем ее математическое ожидание и дисперсию:

$$m_y = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i},$$

$$D_y = D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D_{x_i}.$$

Применим к величине Y неравенство Чебышева:

$$P(|Y - m_y| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D_y}{\varepsilon^2},$$

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n}\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{x_i}}{n^2\varepsilon^2}.$$

Поскольку дисперсии ограничены, то существует некоторое число $C > 0$, для которого $D_{x_i} < C$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, что дает

$$\sum_{i=1}^{n} D_{x_i} < nC.$$

Подставим эту оценку в правую часть последнего неравенства, отчего оно только усилится. Получим

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n}\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$ и запишем теорему Чебышева:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Если рассматривается одна случайная величина, то будет частный случай теоремы: при неограниченном увеличении числа независимых испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины, имеющей ограниченную дисперсию, сходится по вероятности к ее математическому ожиданию, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Покажем, как с помощью теоремы Чебышева просто доказывается теорема Бернулли. В испытаниях Бернулли введем случайные величины X_i, принимающие значения 1, если событие происходит при i-м испытании, и 0, если оно не происходит. Применим к этим событиям теорему Чебышева

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Но

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}}{n} = \frac{nm_x}{n} = m_x = p.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Точно так же доказывается и теорема Пуассона.

Необходимо заметить, что идея вывода неравенства Чебышева и само неравенство, надлежащим образом не выделенное в тексте, содержалось в мемуаре И. Ж. Бьенэме (1796—1878), помещенном в том же выпуске журнала Лиувилля, в котором напечатана и работа Чебышева. Поэтому иногда говорят о неравенстве Бьенэме—Чебышева. А. А. Марков в связи с этим писал: «Мы соединяем с этим замечательным, простым неравенством два имени, Бьенэме и Чебышева, по той причине, что оно впервые ясно высказано и доказано Чебышевым, но основная идея доказательства была значительно раньше указана Бьенэме, в мемуаре которого можно найти и само неравенство, обставленное только некоторыми частными предложениями» [34, с. 92].

Работа Чебышева «О двух теоремах относительно теории вероятностей» (1887) содержит доказанный в статье «О средних величинах» закон больших чисел, а также доказательство центральной предельной теоремы. Она состоит в следующем: если математические ожидания случайных величин u_1, u_2, u_3, . . . равны нулю, а математические ожидания их степеней имеют значения ниже некоторого предела, то вероятность того, что сумма случайных величин, деленная на квадратный корень из удвоенной суммы квадратов математических ожиданий, находится между z_1 и z_2, с возрастанием n до ∞ имеет в пределе

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{-x^2}\,dx.$$

Было замечено, что выдвинутые условия недостаточны для полноценного доказательства теоремы. Именно, как и всюду, не оговаривается независимость случайных величин. Далее, необязательно, чтобы математические ожидания степеней случайных величин ограничивались одним и тем же пределом. Есть и еще существенная погрешность.

При доказательстве теоремы Чебышев воспользовался разработанным им методом моментов случайных величин, который, как упоминал он в мемуаре «О предель-

ных величинах интегралов» (1874), применял ранее Бьенэме.

Уточнения в формулировке теоремы и ее доказательстве выполнены Марковым вскоре после публикации статьи Чебышева.

Не будем входить в тонкости доказательства Чебышева: оно достаточно сложно и не допускает элементарного изложения. Подчеркнем лишь важность центральной предельной теоремы. Она открывает возможность применения теории вероятностей к задачам математической статистики и естественных наук, в которых явления можно рассматривать как результат суммарного воздействия большого числа случайных факторов, слабо влияющих поодиночке на протекание явления в сравнении с влиянием всей совокупности. Центральная предельная теорема дает возможность утверждать, что суммарное воздействие в таких случаях практически следует нормальному закону распределения. Таким образом, она объясняет причины широкого распространения нормального закона и механизм его формирования.

Как видно из изложенного, Чебышева в теории вероятностей интересовали два основных вопроса: закон больших чисел и центральная предельная теорема. Они составляли основу теории вероятностей того времени.

7

Развитие идей Чебышева выпало в первую очередь на долю Маркова. Он был самым ярким выразителем направления Чебышева в теории вероятностей. Его мемуары — образцы точности и ясности и в большой степени содействовали превращению теории вероятностей в одну из самых совершенных областей математики, распространению методов Чебышева.

Андрей Андреевич Марков родился 14 июня 1856 г. в Рязани в семье коллежского советника, служившего в Лесном департаменте. В начале шестидесятых годов семья переехала в Петербург, где отец устроился управляющим имением Е. А. Вальватьевой, на дочери которой позже женился Андрей.

В 1866 г. Андрей поступил в гимназию. С учебой ладилось не все: хорошо успевал только по математике, по остальным предметам, требующим иногда бессмысленной зубрежки, часто получал неудовлетворительные оценки, что беспокоило отца. Математику активно изучал самостоятельно, и одно время ему показалось, что он

открыл новый способ интегрирования линейных дифференциальных уравнений. Это так возбудило его, что он написал о своем открытии Буняковскому, Коркину и Золотареву. Коркин и Золотарев ответили, что найденный им метод известен.

Вместе с изучением математики юноша зачитывался произведениями Чернышевского, Добролюбова, Писарева; это формировало у него соответствующее мировоззрение.

В 1874 г. Андрей закончил гимназию и поступил в Петербургский университет, который окончил в 1878 г. В том же году он получил золотую медаль за сочинение «Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей».

В 1880 г. Марков защитил магистерскую диссертацию «О бинарных квадратичных формах положительного определителя», что принесло ему известность среди математиков. Чебышев высоко оценил эту работу. Тогда же Марков начал преподавать в университете в качестве приват-доцента; читал курсы дифференциального и интегрального исчислений, введение в анализ, теорию вероятностей.

В 1881 г. Марков защитил докторскую диссертацию «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей». Она стала первой среди большого количества его работ по теории моментов, интерполированию и теории наилучшего приближения функций, которые осуществлялись им в течение почти тридцати лет.

В 1883 г. Марков женился на Марии Ивановне Вальватьевой.

По представлению Чебышева в декабре 1886 г. Маркова избрали адъюнктом Петербургской Академии наук, в марте 1890 г.— экстраординарным, в марте 1896 г.— ординарным академиком.

В 1886 г. Марков стал экстраординарным профессором Петербургского университета, в 1893 г.— ординарным. В 1905 г. ушел в отставку в звании заслуженного профессора, но продолжал читать курс теории вероятностей [7]. В то же время проводил расчеты в эмеритальной кассе Министерства юстиции.

Научные интересы Маркова составляли теория вероятностей, теория чисел, математический анализ. Во все эти области математики он внес значительный вклад. Замечательным достижением Маркова стал курс «Исчисление вероятностей», включивший в себя многие его открытия. Четвертое, переработанное, издание курса вышло

после смерти автора, в 1924 г. «Исчисление конечных разностей» Маркова также длительное время пользовалось успехом.

Несколько слов о гражданской позиции А. А. Маркова. Он был человеком смелым, открытым, всю жизнь боровшимся против того что считал глупым, недостойным, тормозящим прогресс.

Вот некоторые факты [8]. Однажды Маркову сказали, что какое-то его предложение противоречит «высочайшему постановлению». Он заявил: «Я вам дело говорю, а вы мне — высочайшее постановление».

На заседании отделения языка и словесности Академии наук 25 февраля 1902 г. М. Горького избрали почетным академиком, о чем в «Правительственном вестнике» 1 марта было помещено сообщение. Николай II, узнав о выборах, решил кассировать их [9]. Через министра народного просвещения Ванновского он потребовал, чтобы президент академии августейший великий князь К. К. Романов в «Правительственном вестнике» сообщил о кассации выборов от имени самой академии, что и было сделано 12 марта. При этом выдвигалась ссылка на то, что Горький находился под надзором полиции.

С протестом против этого произвола выступили А. П. Чехов и В. Г. Короленко, сложившие с себя звания почетных академиков. Марков возмутился действиями императора и послушного ему министра и обратился в академию со следующим заявлением:

«В общее собрание Академии Наук.

Честь имею предложить Собранию настаивать, чтобы объявление о кассации выбора г. Пешкова в почетные академики было объявлено недействительным или исправлено, так как, во-первых, это объявление сделано от имени Академии, которая в действительности не кассировала выбора г. Пешкова, и, во-вторых, приведенный в объявлении мотив кассации лишен значения.

6 апреля 1902 г.

А. Марков».

Заявлению Маркова хода не дали. В 1905 г. он вновь вернулся к кассации выборов Горького. Действия Маркова в защиту Горького гасились президентом академии. И все же он довел до конца начатое дело: в марте 1917 г., опять же по предложению Маркова, Горький был единогласно избран на собрании академии в ее почетные члены.

В 1908 г. произошли студенческие волнения. Минис-

терство народного просвещения выпустило циркуляр, где на профессоров университетов возлагались полицейские функции. Марков написал министру о своем отказе «быть в университете агентом правительства».

В 1911 г. царское правительство произвело разгром Московского университета; в знак протеста университет покинули 120 профессоров и доцентов, в том числе П. Н. Лебедев, К. А. Тимирязев, Н. Д. Зелинский, С. А. Чаплыгин, Н. А. Умов, В. И. Вернадский. В феврале 1911 г. Марков обратился с письмом к непременному секретарю Академии наук с предложением выступить академии в защиту Московского университета и ходатайствовать о возращении в университет уволенных профессоров и доцентов. К. К. Романов положил резолюцию: «Безусловно, не допускаю обсуждения вопроса, поставленного академиком Марковым».

Известно, что Святейший Синод отлучил Л. Н. Толстого от церкви; 12 февраля 1912 г. Марков обратился в Синод с просьбой отлучить и его от церкви. Петербургский митрополит направил к Маркову для наставления протоирея. Ученый сказал, что может вести беседу только по математике, и наставление не состоялось.

Царское правительство организовало в 1913 г. празднование 300-летия дома Романовых. По предложению Маркова, Академия наук провела юбилей 200-летия закона больших чисел; тогда и был выпущен перевод четвертой части книги Я. Бернулли «Искусство предположений» под редакцией и с предисловием Маркова.

Известны многие выступления Маркова против произвола президента Академии наук К. К. Романова, правительства и полиции, о чем в письме Ольденбургу академик А. Н. Крылов писал: «...ведь таких протестов, всегда заявлявшихся открыто и явно, не перечислить, и, конечно, самое имя и ученая слава Маркова придавали им силу и распространение, не способствовавшие упрочению бывшего правительства» [35, с. 610].

В 1917 г. Академия наук предоставила Маркову годичную командировку для занятий наукой. Он уехал с семьей в Зарайск и зиму преподавал математику в реальном училище.

После возвращения в 1918 г. из Зарайска в Петроград Марков продолжил преподавание в университете. Но вскоре здоровье его стало сдавать, на лекции его водил под руку сын.

Марков умер 20 июля 1922 г. Похоронен на Митрофановском кладбище в Ленинграде.

Его сын, известный математик, член-корреспондент АН СССР А. А. Марков, написал подробную биографию отца.

8

Чем ближе мы подходим к тому времени, в котором живем, тем сложнее становится математика и труднее ее доступное изложение. Поэтому пусть читатель не обижается на автора за то, что не получит достаточно полного представления о достижениях в теории вероятностей, совершенных Чебышевым, Марковым, Ляпуновым.

В работах по теории вероятностей Марков главным образом занимался вопросами, связанными с центральной предельной теоремой для сумм независимых случайных величин, с предельными теоремами для зависимых величин, включая и связанные во введенные им цепи.

Центральной предельной теоремой он занимался с 1898 по 1908 г. Он применил разработанный Чебышевым метод моментов и показал, что так можно добиться исчерпывающих результатов.

Первое доказательство центральной предельной теоремы, выполненное Марковым, содержится в письмах к профессору Казанского университета А. В. Васильеву (1898). Они опубликованы в «Известиях» Казанского физико-математического общества.

В письме от 23 сентября Марков отметил, что значение мемуара Чебышева, посвященного центральной предельной теореме, снижается за счет сложности выводов и недостаточной строгости рассуждений. Это не дает возможности считать теорему доказанной. Знакомство с трудами Чебышева привело Маркова к тому, что он решил осуществить свое давнее желание упростить доказательство и сделать его строгим.

Марков рассмотрел сумму независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, у которых математическое ожидание $M(X_i) = 0$ и для всякого целого k существует k-й момент $M(X_n^k)$, ограниченный по абсолютной величине числом C_k, зависящим, вообще говоря, от k, а не от n. Если

$$Y_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n,$$

то при $n \to \infty$ будет

$$M(Y_n^m) - A_m \{M(Y_n^2)\}^{m/2} \to 0$$

где

$$A_m = \frac{2^{m/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^m e^{-t^2} dt.$$

Формулировка Маркова отличается от данной Чебышевым и не содержит упомянутых выше неточностей. Доказательство основано на свойствах математических ожиданий и обобщенной формулы бинома Ньютона.

В мемуаре «О корнях уравнения $e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$» (1898) Марков с помощью метода моментов доказал центральную предельную теорему в форме: «Вероятность того, что сумма $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ независимых величин $u_1, u_2, \ldots, u_n$ содержится между $\alpha\sqrt{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}$ и $\beta\sqrt{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — математические ожидания величин $u_1^2, u_2^2, \ldots, u_n^2$ и α и β — две какие-либо заданные величины, стремится при неограниченном возрастании n к пределу, равному

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt,$$

если бесконечная последовательность независимых величин $u_1, u_2, \ldots, u_n$ удовлетворяет следующим условиям: 1) математическпе ожидания величин $u_1, u_2, \ldots, u_n$ равны нулю;

2) математические ожидания величин $u_k^2, u_k^2, u_k^2, \ldots$ остаются конечными для конечных значений k в случае, когда k неограниченно возрастает;

3) математическое ожидание величины u_k^2 не делается бесконечно малым, когда k неограниченно возрастает» [31, с. 267—268].

В 1900 и 1901 гг. вышли две статьи Ляпунова с доказательством центральной предельной теоремы новым методом в более общих условиях. Марков в одной из работ отмечал, что Ляпунову удалось доказать теорему в более общей постановке в сравнении с доказанной методом моментов. Казалось, что методом моментов доказать ее в постановке Ляпунова нельзя, поскольку он основан на допущении существования всех моментов, не требующемся в условиях Ляпунова.

В последующие годы Марков упорно работал над тем, чтобы доказать методом моментов центральную предель-

ную теорему в условиях Ляпунова. Он провел такое доказательство в 1908 г. введением вспомогательных случайных величин, связанных с данными и обладающих моментами любых порядков. Наряду со случайными величинами $Z_k - a_k$ Марков рассматривал «срезанные» величины

$$X_k = Z_k - a_k \quad \text{при } |Z_k - a_k| < N,$$
$$X_k = 0 \quad \text{при } |Z_k - a_k| \geqslant N.$$

Они имеют любые моменты; распределение суммы их при соответствующем выборе числа N незначительно отличается от распределения исходных величин. Эта идея используется в вероятностных рассуждениях и сейчас.

Доказательство теоремы Ляпунова Марков опубликовал в 1913 г. в приложении к третьему изданию «Исчисления вероятностей». Таким образом, как писал Марков, восстановилось поколебленное значение метода моментов. Но и метод Ляпунова прочно вошел в теорию вероятностей.

Исследование границ применимости центральной предельной теоремы в последующем проводили С. Н. Бернштейн, А. Я. Хинчин и другие математики.

Важные результаты получены Марковым по распространению предельных теорем на последовательности зависимых величин. Здесь он был первопроходцем и основал большой отдел современной теории вероятностей. Его в первую очередь интересовали условия выполнения закона больших чисел и центральной предельной теоремы для сумм $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ зависимых величин. В своих исследованиях Марков пришел к новым объектам, называемым теперь цепями Маркова.

Предположим, что производится последовательность испытаний, в каждом из которых может появиться только одно из k несовместных событий. Последовательность испытаний образует простую цепь Маркова, если вероятность в $(n+1)$-м испытании появиться одному из указанных событий зависит только от того, какое событие произошло в n-м испытании и не изменяется от того, какие события происходили в более ранних испытаниях. Если при этом с каждым исходом испытания связано определенное значение случайной величины X_n, то такая последовательность случайных величин образует простую цепь Маркова.

Если вероятность появления события в $(n+1)$-м ис-

пытании зависит от k предыдущих испытаний, то такая цепь называется сложной цепью Маркова k-го порядка.

В серии работ Марков установил условия, при которых к суммам связанных в цепь случайных величин применимы закон больших чисел и центральная предельная теорема. Он получил также важный результат, состоящий в том, что при определенных условиях распределение вероятностей случайной величины X_n стремится при неограниченном увеличении n к некоторому предельному распределению, не зависящему от того, какие значения она принимала вначале. Эта теорема была первой из эргодических теорем [10], играющих важную роль в статистической физике.

Марков не указал физического приложения созданной им теории. В этом, между прочим, видел Колмогоров причину того, что труды по теории вероятностей Чебышева, Маркова, Ляпунова в Западной Европе вполне оценены только в 20-х и даже 30-х годах XX в., хотя для солидного обоснования статистической физики необходимы центральная предельная теорема Ляпунова и цепи Маркова.

Марков иллюстрировал теорию в 1913 г. исследованием чередования гласных и согласных букв в русском языке. Он рассмотрел последовательность из 20 000 букв «Евгения Онегина», полагая, что ее можно считать простой цепью. То же самое он проделал с последовательностью из 100 000 букв «Детских годов Багрова-внука» С. Т. Аксакова.

Вероятность появления на каком-либо месте гласной буквы зависит от того, были перед ней гласная или согласная. Для последовательности букв из «Евгения Онегина» вероятность появления гласной после гласной равна 0,128, а гласной после согласной — 0,663. В соответствии с эргодической теоремой вероятность встретить на n-м месте гласную букву при больших значениях n получилась равной 0,432. Это значение хорошо согласуется с фактической частотой гласной буквы в тексте «Евгения Онегина».

Цепи Маркова нашли широкое применение в физике. Предположим, что некоторая физическая система в каждый момент времени находится в одном из k состояний; в отдельные моменты в результате испытаний состояние ее меняется дискретно, причем вероятность того, что система окажется в момент t_{n+1} в определенном состоянии, зависит только от того, в каком состоянии она находи-

лась в момент t_n или в моменты t_n, t_{n-1}, . . ., t_{n-k+1}, но не зависит от ее состояния в более ранние моменты. В таком случае получается цепь Маркова с дискретным временем.

Обобщением такой схемы стало распространение ее на непрерывные случайные процессы — процессы Маркова, когда состояние системы во время t_0 определяет закон распределения вероятностей состояний ее в моменты $t > t_0$ независимо от состояний, предшествующих t_0. Вместе с тем получила обобщение и эргодическая теорема.

В развитии идей Маркова приняли участие многие советские и зарубежные математики.

9

Еще один деятельный участник развития теории вероятностей — А. М. Ляпунов. Интересно, что Александр Михайлович — великий математик и механик, действительный член Петербургской Академии наук, его брат Сергей — известный композитор, а Борис — младший брат — языковед, академик Академии наук СССР. Ляпуновы находились в родстве с Сеченовыми и Крыловыми.

Александр Михайлович Ляпунов родился 6 июня 1857 г. в Ярославле. Его отец Михаил Васильевич — директор Демидовского лицея, высшего учебного заведения для детей дворян и разночинцев, в начале следующего столетия приравненного к университету. Михаил Васильевич окончил Казанский университет, до переезда в Ярославль был директором обсерватории университета. В 1863 г. вышел в отставку и поселился в усадьбе жены, в с. Болобонове Симбирской губернии. Умер он в 1868 г.

Первоначально Александра обучал отец; после его смерти мальчика отправили в имение Р. М. Сеченова, где он вместе с двоюродной сестрой готовился к поступлению в гимназию.

В 1870 г. Ляпуновы переехали в Нижний Новгород, и Александр поступил в третий класс губернской гимназии, которую окончил с золотой медалью в 1876 г. Тогда же он был принят на естественное отделение физико-математического факультета Петербургского университета, но через месяц перешел на математическое отделение.

То было время, когда Петербургская математическая школа славилась своими успехами. В университете преподавали выдающиеся математики: Чебышев, Коркин, Золотарев, Поссе, Бобылев, Сохоцкий; их лекции с большим интересом слушал Александр.

Под руководством профессора механики Б. К. Бобылева Ляпунов в 1880 г. написал сочинение по гидростатике, за него факультет присудил ему золотую медаль. Сочинение послужило основой для опубликованных в 1881 г. двух первых работ Ляпунова.

В 1880 г. Александр успешно закончил университет и по предложению Бобылева был оставлен на кафедре механики для подготовки к магистерским экзаменам. Ему назначили стипендию 600 рублей в год.

Сдачу магистерских экзаменов Александр завершил в 1882 г. И стал думать о теме магистерской диссертации. Он неоднократно бывал у Чебышева и беседовал с ним по различным математическим вопросам. Чебышев высказал мнение, что заниматься легкими вопросами, разрешимыми известными способами, нет смысла; необходимо испробовать свои силы на вопросе, представляющем теоретические трудности. И сформулировал задачу: «Известно, что при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные формы перестают служить формами равновесия вращающейся жидкости. Не переходят ли они при этом в какие-либо новые формы равновесия, которые при малом увеличении угловой скорости мало отличались бы от эллипсоидов» [45, с. 7]. Затем Чебышев добавил: «Вот если бы Вы разрешили этот вопрос, на Вашу работу сразу обратили бы внимание».

Так начался длительный период занятий Ляпуновым этой задачей, прославившей его. Не остановило молодого ученого ни то, что Чебышев не мог дать ему никаких указаний в решении ее, что, как он узнал, Чебышев предлагал ее Ковалевской и Золотареву, по-видимому, отступившимся от нее, что задача была на виду, но никто не решался искать новые фигуры равновесия после исчерпывающих работ К. Маклорена, К. Г. Якоби, Ж. Лиувилля.

Ляпунов установил, что в первом приближении «никакие новые формы равновесия вблизи предельного эллипсоида невозможны, но что возможны новые фигуры, мало отличающиеся от других эллипсоидов Маклорена и Якоби». Ему не удалось получить следующие приближения; через два года, прошедших в непрерывном труде, он встретился с непреодолимыми трудностями и вынужден был на неопределенное время оставить задачу.

Однако усилия не были безрезультатными: перед Ляпуновым возникла проблема устойчивости эллипсоидальных форм равновесия, что и составило предмет его магис-

терской диссертации, опубликованной в 1884 и завершенной в январе 1885 г. После защиты диссертации Ляпунов стал известен среди математиков на родине и в Европе. В 1904 г. диссертация переведена и издана во Франции.

Весной 1885 г. Ляпунова утвердили в звании приват-доцента, тогда же он получил приглашение занять кафедру механики Харьковского университета, куда и переехал.

За первые два года пребывания в Харькове Ляпунов усиленно занимался подготовкой и совершенствованием читаемых курсов, напечатал в «Сообщениях Харьковского математического общества» две статьи по теории потенциала, возбудившие интерес харьковских математиков к вопросам математической физики. В 1892 г. он закончил глубокое исследование и опубликовал «Общую задачу об устойчивости движения», где задача об устойчивости впервые рассмотрена с необычайной общностью и точностью. Работа стала докторской диссертацией, защищенной в сентябре 1892 г. Она переведена и опубликована во Франции в 1907 г. и через сорок лет в США. Полученные в диссертации результаты Ляпунов дополнял в работах, публиковавшихся до 1902 г. В исследовании устойчивости движения он как будто заглядывал на много десятилетий вперед.

Теорией устойчивости активно занимался и еще один гениальный математик — А. Пуанкаре. С ним Ляпунов вел переписку. Работы Ляпунова и Пуанкаре по устойчивости движения породили большое количество исследований в наше время.

Вскоре после защиты диссертации, 12 сентября 1893 г., в Харьков пришло известие об утверждении Ляпунова в звании ординарного профессора. Он сразу же решил посвятить больше времени науке и отказался от чтения лекций в Технологическом институте. Профессорское жалованье 3000 рублей в год позволяло это. А лекции в Технологическом институте вместо него стал читать приват-доцент В. А. Стеклов.

В харьковский период Ляпунов усиленно занимался теорией вероятностей. Полученные им результаты были в 1900 и 1901 гг. представлены Академии наук Марковым.

В Харьковском университете Ляпунов читал курс теории вероятностей. Узнав о доказательстве центральной предельной теоремы, выполненном Марковым, он превосходно отозвался о нем перед членами Харьковского

математического общества, но отметил, что оно слишком сложно, содержит ограничения, обусловленные только методом рассуждений, поэтому не исключается прямое, более общее доказательство иным способом. Такое доказательство Ляпунов и построил. Название «центральная предельная теорема» в теории вероятностей получила именно теорема, доказанная Ляпуновым.

Ляпунов в Харькове принимал деятельное участие и в университетских делах. Слова академика В. П. Бузескула отражают влияние личности Ляпунова на университет: «А. М. Ляпунов принадлежал к тем профессорам, которые составляют истинную душу университета, которыми университет живет и процветает, которые носят в себе идеал профессора и ученого. Все низменное ему было чуждо... Он постоянно витал в сфере науки».

Деятельность Харьковского математического общества постоянно интересовала Ляпунова; с 1899 по 1902 г. он был председателем Общества и редактором его «Сообщений».

В 1900 г. Ляпунова избрали членом-корреспондентом, а в 1901 г.— ординарным академиком по кафедре прикладной математики (место осталось вакантным после Чебышева). Стоит заметить, что Академия наук тех времен подразделялась на отделение физико-математических и естественных наук и отделение русского языка и словесности; в каждом отделении было по 20 академиков; членами-корреспондентами могли быть и не живущие в столице ученые; они академического содержания не получали, в заседаниях академии не участвовали.

Весной 1902 г. Ляпунов расстался с Харьковом и переехал в Петербург. Здесь он целиком посвятил себя занятиям наукой, а именно разрешению поставленной Чебышевым задачи. Она стала содержанием его жизни. Ляпунов блестяще разрешил проблему. В. А. Стеклов в речи памяти Ляпунова назвал совершенное им подвигом.

Ученый состоял почетным членом Петербургского, Харьковского и Казанского университетов, членом-корреспондентом Парижской Академии наук, иностранным членом академии деи Линчеи в Риме, почетным членом Харьковского математического общества и других научных обществ.

В 1917 г. Ляпунов переехал в Одессу, где жил его брат Борис Михайлович. Жена Ляпунова страдала от туберкулеза, весной 1917 г. болезнь обострилась и 31 октября 1918 г. она умерла. После смерти жены Ляпунов

выстрелил в себя и 3 ноября 1918 г. скончался. В оставленной записке он просил похоронить его в одной могиле с женой.

10

В 1900 и 1901 гг. в журналах Академии наук появились статьи Ляпунова «Об одной теореме теории вероятностей» и «Новая форма теоремы о пределе вероятностей». В них центральная предельная теорема доказана методом характеристических функций в более общих условиях по сравнению с тем, что было у Маркова.

Характеристической функцией случайной величины ξ называется математическое ожидание величины $e^{it\xi}$, т. е.

$$f(t) = M(e^{it\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x),$$

где $F(x)$ — функция распределения ξ. Поскольку записанный интеграл сходится, характеристическая функция существует для каждой случайной величины и в случае существования моментов ее определяет их, так же как и функцию распределения.

Используя характеристические функции, Ляпунов при доказательстве избавился от условий, выдвигаемых Чебышевым и Марковым. В первой из работ он доказал теорему, когда не требовалась не только ограниченность моментов любого порядка, но и существование их выше третьего порядка.

Теорема сформулирована так: «Предполагая существование математических ожиданий величин

$$x_i,\ x_i^2,\ |x_i|^3 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

и обозначая их соответственно

$$\alpha_i,\ a_i,\ l_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

положим

$$a_1 - \alpha_1^2 + a_2 - \alpha_2^2 + \ldots + a_n - \alpha_n^2 = A$$

и обозначим через L^3 наибольшую из n величин $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Тогда, если выражение $L^2 n^{2/3}/A$ стремится к нулю, когда n бесконечно возрастает, то вероятность неравенств

$$z_1\sqrt{2A} < x_1 - \alpha_1 + x_2 - \alpha_2 + \ldots + x_n - \alpha_n < z_n\sqrt{2A},$$

каковы бы ни были данные числа z_1 и $z_2 > z_1$, будет стремиться, при том же предположении относительно n, к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz\ .$$

и притом равномерно для всех значений z_1 и z_2» [30, с. 184—185].

В 1901 г. Ляпунов опубликовал две заметки, содержащие указание на возможность обобщения доказанной теоремы. После этого вышла вторая из названных работ, в которой налагаемые на случайные величины ограничения ослаблены еще более. Формулировка теоремы такова: «Если через δ обозначить положительное число и через d — математическое ожидание величины $|x_i - \alpha_i|^{2+\delta}$, то всякий раз, когда существует такое значение δ, при котором отношение

$$(d_1 + d_2 + \ldots + d_n)^2/(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{2+\delta}$$

стремится к нулю, когда n возрастает беспредельно, вероятность неравенств

$$z_1 < \frac{x_1 - \alpha_1 + x_2 - \alpha_2 + \ldots + x_n - \alpha_n}{\sqrt{2\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}} < z_2$$

стремится для $n = -\infty$ к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz$$

равномерно для всех значений z_1 и $z_2 > z_1$» [30, с. 223—224]. Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые случайные величины; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — математические ожидания их, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — математические ожидания величин $(x_1 - \alpha_1)^2, (x_2 - \alpha_2)^2, \ldots, (x_n - \alpha_n)^2$; z_1 и z_2 — выбранные числа.

Ляпуновым была дана и оценка погрешности, допускаемой при замене для конечных n точного распределения предельным. Впоследствии Г. Крамер получил более точные оценки.

Роль центральной предельной теоремы в теории вероятностей и ее приложениях значительна. Теорема устанавливает причины стремления законов распределений случайных величин к нормальному. Из нее следует, что, если случайная величина представляет собой сумму большого числа независимых величин, каждая из которых

влияет на всю сумму незначительно, то случайная величина имеет распределение, близкое к нормальному.

К таким величинам относятся, например, ошибки измерений, показатели размеров, веса различной продукции, физические величины, подверженные случайным изменениям.

11

Задержим ненадолго свое движение по годам и столетиям и обратим внимание на одну существенную деталь — почему математики отдавали так много сил изучению предельных теорем теории вероятностей? Ответ очевиден: эти теоремы составляют идеологию теории и лежат в основании многочисленных приложений ее. Необходимо было не только установить закономерности, присущие массовым случайным явлениям, но и расширить границы применимости предельных теорем. И удивление должно вызывать не увлечение ими, а то, что основатели теории вероятностей, Я. Бернулли, Муавр, Лаплас, каким-то чутьем определили их значимость и дали импульс дальнейшим исследованиям.

Не последнюю роль, возможно, играла и своего рода конкуренция, дело шло, как говорят в народе, «на характер»: у кого-то не получилось, сделаю я. Маркову потребовалось около 8 лет, чтобы «реабилитировать» метод моментов и доказать с его помощью центральную предельную теорему в постановке Ляпунова.

Обратимся к существу вопроса. Предельные теоремы определяют условия возникновения некоторых закономерностей, когда то или иное явление происходит под действием большого количества случайных факторов. Доказанная Я. Бернулли теорема об отклонении относительной частоты m/n от вероятности появления события в независимых испытаниях представляет собой первую форму закона больших чисел. Пуассон распространил теорему на случай, когда вероятность появления события в испытаниях не сохраняется постоянной.

Введем, как и раньше, случайную величину X_i, принимающую значение 1, когда событие произошло в i-м испытании, и 0, когда оно не произошло. При таких условиях число появлений события в n испытаниях можно представить как сумму независимых случайных величин:

$$m = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Если рассматривается последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$; S_n —

сумма первых n из них; A_n — математическое ожидание этой суммы; B_2^n — дисперсия ее, то для указанной последовательности закон больших чисел будет: при любом $\varepsilon > 0$ вероятность неравенства $\left|\frac{S_n}{n} - \frac{A_n}{n}\right| > \varepsilon$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Границы применимости закона больших чисел были установлены сначала Чебышевым, потом Марковым. Вопрос о необходимых и достаточных условиях приложимости закона больших чисел решен в 1928 г. Колмогоровым. В 1929 г. Хинчин показал, что если величины X_i имеют одну и ту же функцию распределения, то эти условия состоят в том, что математические ожидания случайных величин конечны.

Начатое Марковым распространение закона больших чисел на зависимые случайные величины продолжил Бернштейн. Работы по обобщению закона больших чисел, кроме упомянутых Колмогорова и Хинчина, выполнили французский математик Э. Борель, итальянский математик Ф. Кантелли, Ю. В. Прохоров, А. А. Бобров, Б. В. Гнеденко, В. И. Гливенко, французские ученые Р. Форте, Э. Мурье и многие другие.

Первоначальные формы центральной предельной теоремы рассмотрены Муавром, Лапласом, Чебышевым, Марковым.

К последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n, \ldots$ применима центральная предельная теорема, если для любых z_1 и z_2 вероятность неравенства $z_1 B_n <$ $< S_n - A_n < z_2 B_n$ стремится при $n \to \infty$ к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2/2}\, dz.$$

Условия Ляпунова состоят в следующем: пусть

$$c_k = M \mid X_k - M(X_k) \mid^{2+\delta}, \ \delta > 0,$$

$$C_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n,$$

если отношение $L_n = C_n / B_n^{2+\delta}$ стремится к 0, когда $n \to \infty$, то к последовательности случайных величин применима центральная предельная теорема.

В 1922 г. финский математик Дж. Линдеберг доказал центральную предельную теорему, отказавшись от требования существования каких-либо моментов случайных величин, кроме вторых.

С. Н. Бернштейн в 1926 г. в основных чертах разре-

шил вопрос об условиях приложимости центральной предельной теоремы. Его исследования дополнил американский математик В. Феллер. Дальнейшую разработку проблем, связанных с центральной предельной теоремой, проводили А. Я. Хинчин, А. Н. Колмогоров, П. Леви и др. А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко, французские математики П. Леви, В. Деблин и др. полностью изучили возможные предельные распределения для сумм независимых случайных величин и условия сходимости к некоторым законам распределения, отличным от нормального.

12

При подведении итогов развития теории вероятностей в период от Лапласа до конца XIX в. можно отметить следующие особенности этого процесса:

1. Теория вероятностей после работ Лапласа стала естественнонаучной дисциплиной с применением в ней методов математического анализа и характеристических функций. Пуассон и Чебышев доказали различные формы закона больших чисел. Лаплас, Чебышев и Марков доказали центральную предельную теорему.
2. Лаплас и Гаусс построили теорию ошибок.
3. Возросло значение статистики народонаселения, что привело к созданию статистических служб и обществ, повысило интерес к теории вероятностей.
4. Работы Чебышева положили начало становлению теории вероятностей как общематематической дисциплины, чему содействовало введение понятия случайной величины, завоевавшее в теории вероятностей ведущее положение, в результате чего функции распределения и характеристические функции стали объектами специального изучения. В итоге теория вероятностей в тридцатые годы XX в. превратилась в математическую науку, связанную с науками о природе, техническими и социально-экономическими дисциплинами.
5. Максвелл и Больцман обосновали вероятностный характер некоторых фундаментальных законов природы, что привело к приложению вероятностных представлений в физике.
6. Появилась «континентальная» школа статистики народонаселения и биометрическая школа.
7. В ряде работ теория вероятностей находила обоснование с позиций математической логики.

Эти особенности развития теории вероятностей свидетельствуют о возрастании ее роли в системе естественных наук.

Аксиоматизация. Дальнейшие приложения

1

Значительную роль в оформлении основных понятий теории вероятностей сыграли работы Ж. Бертрана и А. Пуанкаре. Бертран в вышедшей в 1899 г. книге «Исчисление вероятностей» рассмотрел ряд парадоксов, возникающих в результате нечеткости понятий теории вероятностей, в первую очередь — понятия вероятности. Такая неточность допускала различные результаты выдвинутых и решаемых им задач.

Пуанкаре обсуждал вопросы вероятности в философских работах и в книге «Исчисление вероятностей» (1912). Его взгляды на существо теории вероятностей совпадали с тем, что утверждали многие математики и философы. Он считал, что проблемы вероятности могут быть «классифицированы по большей или меньшей глубине незнания», что «случай — только мера нашего невежества», случайные явления характерны тем, что законов их мы не знаем, отводил вероятности области, не изученные нами.

Пуанкаре как-то в шутку сказал: «В нормальном законе должно быть что-то таинственное, так как математики считают его законом природы, тогда как физики убеждены в том, что он является математической теоремой».

Пуанкаре рассмотрел парадоксы Бертрана и обобщил их. Бертран и Пуанкаре подчеркивали нечеткость понятий теории вероятностей и тем самым выдвигали необходимость уточнения их. К этому же приводило развивающееся естествознание, испытывающее все большее и большее приложение вероятностных методов.

В начале XX в. назрела необходимость аксиоматизации теории вероятностей. В знаменитом докладе на Международном конгрессе математиков в Париже (1900) Д. Гильберт причислил теорию вероятностей к физическим наукам. При постановке шестой проблемы он сказал:

«С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь — теория вероятностей и механика» [36, с. 240].

Впервые аксиоматическое построение науки было выполнено в Древней Греции, классический пример тому — «Начала» Евклида (III в. до н.э.). Аксиомы получаются из опыта, на основе многократной практики человечества и не требуют доказательств. Из них выводятся все предложения теории. После того как Н. И. Лобачевский показал, что геометрия может быть построена на системе аксиом, отличной от евклидовой, значение аксиоматического метода возросло. К началу XX в. усилиями Д. Гильберта, Д. Пеано, В. Ф. Кагана произведен анализ аксиом геометрии, аксиоматизацию арифметики построили Д. Гильберт и Д. Пеано.

Основное уязвимое место классического определения вероятности — требование равновозможности исходов опыта. Ведь в этих словах заключен порочный круг: равновозможность тождественна равновероятности. О равновозможности исходов опыта допустимо вести речь лишь в редких случаях «симметрии» опыта, поэтому вне сферы применения вероятностных методов оставались многие проблемы физики, статистики, биологии, техники.

Аксиоматизация теории вероятностей знаменовала новый, плодотворный этап ее развития. Первые исследования в этом направлении провел С. Н. Бернштейн. В 1917 г. вышла его работа «Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей». Подробное изложение аксиоматики Бернштейн дал в книге «Теория вероятностей», вышедшей первым изданием в 1924 г. и четвертым — в 1946 г. Аксиоматика Бернштейна сыграла положительную роль, но не дошла до наших дней.

Попытку обосновать теорию вероятностей предпринял эмигрировавший в США из гитлеровской Германии Р. Мизес. Он не считал теорию вероятностей математической наукой; поскольку ее методы применяются к различным процессам, она является наукой реального мира, а математика таковой не служат.

Мизес сформулировал новые аксиомы и определил вероятность события как предел относительной частоты m/n при $n \to \infty$. Эта трактовка подверглась критике, указывалось, что предел, о котором идет речь, не существует. Однако частотная концепция Мизеса находила под-

держку, в ряде работ были предприняты попытки полной формализации ее.

Основу современной теории вероятностей составляет аксиоматика А. Н. Колмогорова. Здесь стоит вспомнить слова Колмогорова о роли аксиоматизации. В работе [25] он отметил, что теория вероятностей занимает в ряду наук особое положение, поскольку случайные явления, допускающие оценку их вероятностей, встречаются как в области механических, физических, химических, так и биологических и социальных явлений. В силу этого теория вероятностей «применима к любой отрасли реального мира». Но ее нельзя отнести к чистой математике, так как основные ее понятия не принадлежат чистой математике. Широкая применимость вероятностных методов составляет особую привлекательность теории вероятностей, хотя и таит в себе трудности при пользовании ею.

С помощью аксиоматизации теории вероятностей ее можно превратить в чистую математику. Например, система аксиом Колмогорова преобразует теорию вероятностей «в чистую математику», а именно в специальную часть абстрактной теории меры множества...» Однако такое сведение теории вероятностей приводит к тому, что «специфические проблемы теории вероятностей превращаются в чрезвычайно искусственные задачи из теории меры, идейная направленность теории вероятностей становится малопонятной, наконец, теряется возможность специфически вероятностного интуитивного предвидения результатов» [25, с. 53].

Эта причина обусловливает то, что специалисты по теории вероятностей считают себя представителями особой науки со «специфическим стилем мышления» и направляют свои исследования на уяснение законов реальных случайных явлений, «возникновения строгой причинной зависимости на почве наложения большого числа независимых или слабо связанных случайных факторов...»

Обратимся к аксиоматике Колмогорова. Сначала сформулируем определения. Обозначим: U — множество элементарных событий [1], F — множество подмножеств множества U (множество событий).

К множеству F предъявляются требования: 1) V принадлежит F; 2) если A и B принадлежат F, то $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A + B$, $A \cdot B$ также принадлежат F; 3) если A_1, A_2, ..., A_n, . . . принадлежат F, то их сумма и произведение также принадлежит F,

Множество F, удовлетворяющее сформулированным требованиям, называется σ-алгеброй событий.

Выскажем основные определения аксиоматической вероятности:

1. Множество U называется достоверным событием.

2. Множество $V = \overline{U}$ называется невозможным событием.

3. Суммой событий A и B называется множество, состоящее из элементов, входящих в A или B или в A и B.

4. Произведением событий A и B называется множество, состоящее из элементов, входящих в A и B.

5. Противоположным событием A называется множество, состоящее из элементов U, не входящих в множество A.

Теперь аксиомы Колмогорова.

Аксиома 1. Каждому случайному событию A, принадлежащему множеству F, поставлено в соответствие неотрицательное число $P(A)$, называемое его вероятностью.

Аксиома 2. Вероятность достоверного события $P(U) = 1$.

Аксиома 3. (аксиома сложения). Если события A_1, A_2, ..., A_n попарно несовместны, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n);$$

Расширенная аксиома сложения. Если событие A равносильно наступлению хотя бы одного из несовместных событий A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ..., то $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots$

Аксиома непрерывности. Если последовательность событий B_1, B_2, ..., B_n такова, что каждое последующее событие влечет за собой предыдущее и произведение всех событий B_n есть событие невозможное, то $P(B_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Аксиомы 4 и 5 эквивалентны между собой.

Из первых трех аксиом вытекают следствия.

1. Вероятность невозможного события равна нулю.

2. Для любого события A

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

3. Каково бы ни было случайное событие A,

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

4. Если событие A влечет за собой событие B, то

$$P(A) \leqslant P(B).$$

5. Для произвольных событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Отсюда

$$P(A+B) \leqslant P(A) + P(B)$$

и по индукции

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Развитие теории вероятностей в последние десятилетия шло на основе разработанной Колмогоровым аксиоматики. Хотя она и построена на теории множеств, не лишенной непреодолимых парадоксов, эта аксиоматика в настоящее время получила признание. Однако и вокруг нее ведутся споры и дискуссии: такова природа самой теории вероятностей. И, пожалуй, прав Л. Е. Майстров: «Ни аксиомы, ни классический подход к вероятности, ни статистический не могут дать исчерпывающего определения содержания понятия вероятности, они являются лишь известными приближениями ко все более полному его раскрытию» [33, с. 241].

2

В заключение книги — о новых применениях теории вероятностей.

Любая естественная наука сильна своим идейным содержанием и приложениями. Не составляет исключения и теория вероятностей. О развитии содержания ее сказано выше достаточно, сейчас необходимо уделить внимание достижениям по применению вероятностных методов.

Следует отметить сразу же, что применять их нужно со знанием дела и по существу. Вот пример. Ученица академика Лысенко Н. Ермолова решила опровергнуть открытый Г. Менделем (1822—1884) закон расщепления признаков, состоящий в том, что частота встречаемости доминантного (преобладающего) признака в потомстве близка к 3/4. Ермолова провела опыты с горохом, установила, что эта частота будто бы значительно уклоняется от 3/4 и сделала вывод о несостоятельности закона Менделя. Характерно, что Ермолова не воспользовалась математическим аппаратом для проверки статистической гипотезы о справедливости закона Менделя по ее экспериментальным результатам. Биологи, к которым она при

надлежала, отвергали возможность применения математики в биологии, не желали «подчиняться слепой случайности».

На публикацию Ермоловой обратил внимание Колмогоров. Он провел тщательный статистический анализ ее экспериментальных данных и в «Докладах Академии наук» в 1940 г. опубликовал статью «Об одном подтверждении законов Менделя», где указал: «Материал этот, вопреки мнению самой Н. И. Ермоловой, оказывается блестящим новым подтверждением законов Менделя».

Огромные потенциальные возможности для применений в естествознании, инженерной практике, экономике, организации производства, теории связи таит разработанный в XX в. раздел теории вероятностей — теория случайных процессов. Он был основан А. Н. Колмогоровым, А. Я. Хинчиным, Е. Е. Слуцким, Н. Винером. Возникновение теории случайных процессов в русле теории вероятностей естественно, поскольку в физике, технике, биологии встречаются не застывшие схемы, к которым применим аппарат оформившейся ранее теории вероятностей, а протекающие во времени процессы. Изучение броуновского движения послужило одним из стимулов к созданию теории случайных процессов. Другим стимулом были процессы, протекающие в телефонии. Датчанин А. К. Эрланг занимался изучением загрузки телефонных сетей, вопросами расчетов пропускной способности их, аппаратуры, управляемых связью систем. Работы Эрланга сыграли значительную роль в формировании основ теории случайных процессов.

Еще один источник теории случайных процессов — исследования по динамике биологических популяций. На базе детерминистских соображений во втором десятилетии XX в. итальянский математик В. Вольтерра создал математическую теорию этих процессов. В работах некоторых биологов и математиков его идеи получили развитие на вероятностной основе. Отсюда пошло наименование частного вида случайных процессов — гибели и размножения.

Теория случайных процессов нашла применение при изучении процессов диффузии, химических реакций, радиоактивного распада и многих других. Надо иметь в виду, что с точки зрения математики имеют одну и ту же основу, скажем, такие явления, как поступающие от абонентов вызовы на телефонную станцию, обрывы нитей прядильных машин; одинаково описываются число рас-

павшихся частиц радиоактивного вещества за определенный промежуток времени, число частиц, оказавшихся в некоторой области пространства в результате броуновского движения, и т. д.

Теорию броуновского движения в 1905 г. создали М. Смолуховский и А. Эйнштейн. Высказанные ими идеи широко использовались не только при изучении физических явлений. Н. Винер позднее также обращался к исследованию броуновского движения и ввел случайные процессы, удовлетворяющие выдвинутым им требованиям.

В 1914 г. М. Планк и Фоккер изучали средствами теории вероятностей явление диффузии.

Работы Маркова, связанные с цепными зависимостями, и Слуцкого по теории случайных функций сыграли существенную роль в создании общей теории случайных процессов.

Начало оформления ее связывают с выходом в 1931 г. статьи Колмогорова «Об аналитических методах в теории вероятностей» и в 1934 г. статьи Хинчина «Теория корреляции стационарных стохастических процессов». За ними последовало огромное количество работ.

В статье Колмогорова изложены основы теории случайных процессов без последействия, выведены дифференциальные уравнения, управляющие вероятностями переходов. Там же дан набросок теории скачкообразных процессов без последействия, развитой В. Феллером и В. М. Дубровским.

А. Я. Хинчин ввел понятие стационарного процесса в широком и узком смысле, вывел формулу коэффициента автокорреляции. Выдвинутые им идеи послужили основанием для работ Г. Крамера, Г. Вальда, Колмогорова.

В дальнейшем развитии теории получилось так, что если случайная величина зависит от одного параметра, то стали говорить о случайном процессе, а если от нескольких, то о случайном поле. Случайные поля наблюдаются в геофизике, биологии. Их образуют, например, плотность воды в океане, сила и направление ветра и т. д.

При изложении истории развития случайных процессов Б. В. Гнеденко отмечает существенную деталь: зачастую той или иной теории еще не существует, а предваряющие ее задачи исследователи решают. Так было, когда Н. Бернулли, Монмор и Муавр рассматривали задачу о разорении игрока и состоянии игроков после партий. Ее можно отнести к теории случайных процессов, когда роль времени исполняет число сыгранных партий.

То же самое можно сказать и о задаче Лапласа с перекладыванием шаров из урны в урну и определения содержания урны после n перекладываний. Гнеденко отмечает, что иногда требуется значительное время, чтобы отдельные задачи дали начало новой теории.

3

Особенно много приложений теория вероятностей находит в статистике [2]. Математическая статистика зародилась вместе с теорией вероятностей в XVII в. и получила значительное развитие во второй половине XIX — начале XX в. благодаря работам Чебышева, Маркова, Ляпунова, Гаусса, Кетле, Гальтона, Пирсона. В XX в. наибольший вклад в нее сделали советские, английские и американские ученые.

В классический период развития теории вероятностей предметом статистики были вопросы демографии и различного рода страхования; на этих направлениях она и базировалась.

В настоящее время математическая статистика занимается широким кругом практических задач. Основные ее цели состоят в построении методов описания и обработки экспериментальных данных для изучения массовых случайных явлений, установления научных и практических выводов. В ней, в частности, определяется число необходимых испытаний до начала исследования (планирование эксперимента), во время исследования (последовательный анализ). Современная математическая статистика, в частности, дает возможность принимать решения в условиях неопределенности.

При изучении различных явлений обычно регистрируются результаты наблюдений или измерений какой-либо одной или нескольких величин, которые можно рассматривать как значения случайных величин.

Для установления закономерностей явления возникает необходимость определения по опытным данным приближенного значения вероятности того или иного случайного события, неизвестного закона распределения случайной величины, неизвестных параметров распределения, необходимость проверки статистических гипотез. Статистической называется выдвинутая по экспериментальным данным гипотеза о неизвестных законах или параметрах распределения. Ее проверка состоит в установлении, не противоречит ли она опытным данным.

В результате эксперимента могут быть получены зна-

чения двух или большего числа случайных величин. Встает задача: установить наличие функциональной или статистической связи между двумя величинами или одной и остальными и оценить эффективность ее. Функциональная связь наблюдается редко, поскольку случайные величины обычно подвержены действию случайных факторов, иногда общих для всех. В производственной деятельности наблюдаются статистические зависимости, т. е. такие, когда, например, с изменением одной величины меняется распределение другой. Частным случаем статистической зависимости служит корреляционная. Это такая зависимость, когда с изменением одной величины меняются средние значения другой. (На эти значения могут влиять не одна, а несколько величин.) Примером корреляционной может быть связь между средними урожаями с единицы площади и количеством вносимых удобрений.

В период интенсивно развивающегося производства возникает актуальная задача управления процессами. Предположим, что происходит определенный случайный процесс. Под влиянием каких-то воздействий его обычное протекание может быть нарушено. Необходимо зафиксировать отклонение процесса от нормы и оказать воздействие для восстановления нормального хода его.

Все сформулированные выше задачи решаются методами математической статистики. Остановимся несколько подробнее на задачах корреляции и управления производством.

В феврале 1877 г. лорд Ф. Гальтон (1822—1911) выступил с сообщением перед членами Лондонского Королевского общества об оригинальной работе и несколько раз употребил никому не знакомое слово «корреляция». Гальтон изучал зависимость физических данных сыновей от физических данных отцов и установил, что в среднем рост сыновей меньше роста отцов. Он получил уравнение, связывающее эти величины, и назвал его уравнением регрессии. Нематематический термин «регрессия» так и вошел в математику. Вывод Гальтона не нашел подтверждения, а основанный им метод получил развитие и распространился в практике обработки результатов опытов.

Гальтон вел исследования по антропологии, метеорологии, психологии. Его девиз был «Где возможно, считайте». На лекции Гальтон подсчитывал покашливания и различные движения слушателей и определял тем са-

мым меру их внимательности. Во время прогулки он иногда считал, сколько женщин из встретившихся ему были поразительно красивы, сколько заурядны или некрасивы, собирая таким образом материал для «карты красоты в Англии». Он первым начал составлять карты погоды, открыв пути движения антициклонов. Им была также разработана система для классификации отпечатков пальцев. Вообще Гальтон был богато одарен тем, что называют «безграничной способностью к деталям».

Но наибольшую известность он получил как основатель евгеники. Гальтон считал, что улучшение человеческой породы есть дело науки в той же мере, как и улучшение породы скота.

Большой вклад в теорию корреляции внес А. А. Чупров. Он обнаружил несколько ошибок и методологических неточностей в работах Гальтона и его учеников и, не желая подрывать авторитет английской математической школы, отправил частное письмо об этих ошибках. Неожиданно через полгода он получил журнал «Биометрика» со статьей «Согрешили», в которой были исправлены допущенные ошибки и выражена благодарность Чупрову. Ученик Гальтона К. Пирсон там же высоко оценил достижения Чупрова и признал, что его исследования «вызвали всеобщее восхищение».

В теории корреляции отыскивается уравнение $y_{\text{ср}} = f(x)$, связывающее две случайные величины (или одну с несколькими другими). Параметры функции $f(x)$ находятся по методу наименьших квадратов. Значимость полученной зависимости определяется с помощью коэффициента корреляции или корреляционного отношения.

Будем считать, что сказанного достаточно, чтобы получить общее представление о решении задачи об установлении связей между случайными величинами. Отметим лишь, что в настоящее время корреляционный анализ нашел строгое математическое обоснование в работах А. Н. Колмогорова и Ю. В. Линника.

Остановимся на статистическом методе управления производством. Вопросы управления качеством продукции встали перед учеными и практиками давно. Во всяком производстве важно не только выявлять некачественную продукцию, но и своевременно вмешиваться в производство и не допускать брака. Возникла необходимость разработать методы, позволяющие до появления бракованной продукции определять повышенную вероятность изготовления ее.

Статистический метод управления производством состоит в том, что периодически берутся пробы готовой продукции, скажем, от станка, небольшими партиями на обследование и по результатам определяется качество изделия. Результаты обследования наносятся на специальные контрольные карты, по которым и можно судить о том, продолжать работу или прекращать для переналадки станка. В случаях, когда скорость технологического процесса велика и взятие проб вручную неэффективно (результаты обследования отстанут от убежавшего вперед процесса), то пользуются автоматами, выполняющими и математические операции.

Одновременно с совершенствованием методов контроля развивались и статистические методы приема продукции. Нетрудно догадаться, что те и другие приносят и будут приносить большую экономию средств, материалов и рабочей силы.

На этом закончим краткое ознакомление с приложениями теории вероятностей к практическим делам. Конечно же, есть и многие другие разделы, порой самые неожиданные, скажем, планирование эксперимента. Сведения о них можно найти в специальной литературе.

* * *

Как же точно подметил Б. Паскаль: «Только кончая задуманное сочинение, мы уясняем себе, с чего нам следовало бы его начать». В самом деле, кажется, что один вопрос можно было осветить так, другой — иначе. И многое, и многие остались за бортом. Однако следует помнить мудрое: нельзя объять необъятное. А теория вероятностей, как и всякая истинная наука, именно такова. Но сожалеть нет смысла: время на написание книги затрачено, энергия, бумага и чернила в ручке израсходованы. Когда-то надо поставить точку. Кроме того, следует помнить, что лучшее враг хорошего.

Литература

1. *Башмакова И. Г.* Пьер Ферма (1601—1665) // Замечательные ученые. М.: Наука, 1980.
2. *Бернулли Я.* Часть четвертая сочинения Я. Бернулли «Ars conjectandi». СПб., 1913.
3. *Борель Э.* Случай. М.; Пг.: Мосполиграф, 1923.
4. *Борель Э.* Вероятность и достоверность. М.: Наука, 1964.
5. *Бройль Луи де.* По тропам науки. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
6. *Буняковский В. Я.* Основание математической теории вероятности. СПб., 1846.
7. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Физматгиз, 1960.
8. *Воронцов-Вельяминов Б.* Лаплас. М.: Журн.-газет. объед. 1937. Вып. 23—24 (119—120).
9. *Гаусс К. Ф.* Избранные геодезические сочинения. М.: Изд-во АН СССР, 1957. Т. 1.
10. Карл Фридрих Гаусс: Сб. статей к 100-летию со дня смерти. М.: Изд-во АН СССР, 1956.
11. *Гнеденко Б. В.* Развитие теории вероятностей в России // Тр. Ин-та истории естествознания. 1948. Т. 11.
12. *Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1976.
13. *Гнеденко Б. В.* Очерк истории теории вероятностей // Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.
14. *Гутер Р. С., Полунов Ю. Л.* Джироламо Кардано. М.: Знание, 1980.
15. *Давидов А. Ю.* Теория вероятностей: Литограф. курс лекций. 1879—1880.
16. *Даймонд С.* Мир вероятностей. М.: Статистика, 1970.
17. *Данте.* Божественная комедия: Чистилище. М.; Л.: Гослитиздат, 1950.
18. *Зернов Н.* Теория вероятностей. М., 1843.
19. История естествознания в России. М.: Изд-во АН СССР, 1960. Т. 2.
20. История математики. М.: Наука, 1970. Т. 2.
21. История математики. М.: Наука, 1972. Т. 3.
22. История механики с древнейших времен до конца XVIII века. М.: Наука, 1971.
23. *Клайн М.* Математика: Утрата определенности / Пер. с англ. Ю. А. Данилова, под ред. И. М. Яглома. М.: Мир, 1984.
24. *Кляус Е. М., Погребысский И. Б., Франкфурт У. И.* Паскаль. М.: Наука, 1971.
25. *Колмогоров А. Н.* Роль русской науки в теории вероятностей // Учен. зап. МГУ. 1947. Т. 1, кн. 1.

26. *Кольцов А. А.* Некоторые материалы к биографии академика А. А. Маркова // Вопросы истории естествознания и техники. 1956. Вып. 1.
27. *Курно Ог.* Основы теории шансов и вероятностей. М.: Наука, 1970.
28. *Лаплас П. С.* Опыт философии теории вероятностей / Пер. с фр. под ред. А. К. Власова. М., 1908.
29. *Лукреций.* О природе вещей. М.: Изд-во АН СССР, 1946.
30. *Ляпунов А. М.* Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1948.
31. *Майстров Л. Е.* Роль азартных игр в возникновении теории вероятностей // Acta Universitatis Debreceniensis. T. VII/2, 1961. Debrecen, 1962.
32. *Майстров Л. Е.* Теория вероятностей: Истор. очерк. М.: Наука, 1967.
33. *Майстров Л. Е.* Развитие понятия вероятности. М.: Наука, 1986.
34. *Марков А. А.* Исчисление вероятностей. М.: Гос. изд-во, 1924.
35. *Марков А. А.* Биография А. А. Маркова // Марков А. А. Избр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1951.
36. Математика XIX века. М.: Наука, 1978.
37. *Мякишев Ю. В.* Теория вероятностей в задачах взаимодействия материалов в твердой фазе. М.: МЭИ, 1987.
38. *Налимов В. В.* Вероятностная модель языка. М.: Наука, 1974.
39. *Остроградский М. В.* Педагогическое наследие. М.: Физматгиз, 1961.
40. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1983.
41. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979.
42. *Реньи А.* Письма о вероятности. М.: Мир, 1970.
43. *Рыбников К. А.* История математики. М.: Изд-во МГУ, 1974.
44. *Смирнов В. И.* Даниил Бернулли // Бернулли Д. Гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
45. *Смирнов В. И.* Александр Михайлович Ляпунов // Ляпунов А. М. Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 1.
46. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1978.
47. *Тарасов Л. В.* Мир, построенный на вероятности. М.: Просвещение, 1984.
48. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей. М.: Изд-во МГУ, 1972.
49. У истоков классической науки. М.: Наука, 1968.
50. *Франкфурт У. И., Френк А. М.* Христиан Гюйгенс. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
51. *Хургин Я. И.* Как объять необъятное. М.: Знание, 1979.
52. *Цейтен Г. Г.* История математики в XVI и XVII веках. М.; Л.: ГТТИ, 1933.
53. *Чебышев П. Л.* Полное собрание сочинений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. Т. 2.
54. *Чубарев А. М., Холодный В. С.* Невероятная вероятность. М.: Знание, 1976.
55. *Bayes T.* Studies in the history of probability and statistics. IX. Thomas Bayer's essay towards solving a Problem in the Doctrine of chances (Reproduced from Phil. Trans. 1763, 53). Biometrica. 1958. 45. N 3/4.
56. *Bernoulli J.* Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). I und II Teil. Leipzig, 1899. (Ostwald's klassiker; 107).

57. *Bernoulli N.* De usu Artis conjectandi in jure. Basilleae, 1709.
58. *Cardano G.* Opera ownia. Lyon, 1663. T. I.
59. *Fermat P.* Oeuvres. P., 1894. T. II (Correspondence).
60. *Paskal B.* Oeuvres complètes. P., 1963.
61. *Tartaglia N.* General trattato di numeri et misure. Venezia, 1560.
62. *Todhunter I.* History of the mathematical theory of the probability. Cambridge; L., 1865.

Примечания

К «Введению»

[1] Аналогичная описанной Цицероном ситуация со случайным получением литературных сокровищ обсуждалась математиками и впоследствии.

К главе «Истоки»

[1] Сохранилась легенда, что сам сатана был доволен организацией генуэзской лотереи и нанес дружеский визит ее создателю.

Для сравнения вероятность наибольшего выигрыша в спортлото, когда зачеркивается 6 клеток из 49, приблизительно равна 1/14 000 000.

О переживаниях участников генуэзской лотереи писала Матильда Серао в новелле «Розыгрыш лотереи» (Итальянские новеллы. 1880—1914 гг. М.: ГИХЛ, 1960. С. 226—250).

Представляет интерес следующее. В 1771 г. от распорядителя генуэзской лотереи поступило предложение организовать ее в России. Екатерина II распорядилась: «Слава Богу, мы не в таком положении, чтобы для умножения дохода казны нашей несколькими стами тысяч рублей мы имели нужду народу давать поощрение к бóльшему мотовству и повод ко всем порокам, из того проистекающим, и для того откажите итальянским проекторам».

[2] Автором этой поэмы одно время считали Овидия (43 г. до н. э. — ок. 18 г. н. э.); она вошла в некоторые средневековые издания его сочинений.

[3] При бросании одной кости — 6 исходов. При бросании двух — каждая грань комбинируется с каждой гранью другой кости, это даст $6^2 = 36$ исходов. При бросании трех костей — $6^3 = 216$ исходов. Так считает теперь рядовой студент. Но не следует забывать, что прошло более семи столетий.

[4] Запись, например, P (9) означает вероятность того, что сумма выпавших очков равна 9.

К главе «Начало»

[1] Курьезный факт: в начале XVI в. кандидаты на степень магистра искусств в Парижском университете не сдавали экзамен по геометрии, а присягали в том, что прослушали лекции по шести первым книгам «Начал».

[2] Янсенизм — течение в католицизме, основанное голландским богословом К. Янсением (1585—1638). Янсенисты выступали против иезуитов.

[3] Францисканцы — члены нищенствующего ордена, основанного в Италии Франциском Ассизским (1182—1226) в 1207—1209 гг.

[4] Впервые термин «ожидание» употребил Ф. ван Схоотен.

К главе «Становление»

1 Изохрона — кривая, по которой тело под действием силы тяжести за одинаковые промежутки времени опускается на равные высоты.

2 Брахистохрона — кривая наискорейшего спуска, т. е. такая, по которой тело под действием собственной тяжести переместится из одной точки в другую в кратчайшее время.

Изопериметрическая задача состоит в нахождении фигуры наибольшей площади, имеющей заданный периметр.

3 В ранние годы занятий математикой Якоб Бернулли открыл многие свойства логарифмической спирали, в том числе и то, что ее эволюта (геометрическое место центров кривизны) — также логарифмическая спираль. Именно поэтому на его надгробном камне изображена логарифмическая спираль.

4 Ее же называют «петербургским парадоксом», «петербургской задачей». См., например: *Борель Э.* Вероятность и достоверность. М.: Наука, 1964. С. 78—83.

5 Уравнение Риккати имеет вид $y' = ax^n + by^2$.

6 Здесь и далее цит. по: *Bernoulli N.* De usu Artis conjectandi in jure. Basilleae, 1709.

7 Два события называются совместными, если появление одного не исключает появления другого. Конечно же, Бернулли такую терминологию не употребляет.

8 Фигурные числа — обобщение треугольных чисел 1, 3, 6, 10, . . ., задаваемых формулой $n(n+1)/2$, где $n = 1, 2, 3$ . . . Из формулы фигурных чисел $n + (k-2)\, n\,(n-1)/2$ при $k = 3$ получаются треугольные числа, при $k = 4$ — квадратные n^2, при $k = 5$ — пятиугольные $(3n^2 - n)/2$ и т. д. Фигурные числа играли важную роль в развивающейся арифметике.

9 Этот термин был введен в 1835 г. Пуассоном.

К главе «Первые шаги»

1 В «Истории математики» (т. 3) указывается, что частицу «де» Муавр прибавил к фамилии сам.

2 Слово локальный (от латинского localis) означает местный; интегральный — полный, целый.

3 Последовательность называется возвратной, если каждый ее член, начиная с некоторого, выражается через предыдущие. Таковой будут, например, геометрическая прогрессия, у которой $u_n = qu_{n-1}$, и арифметическая прогрессия, у которой $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

4 Этот термин ввел Г. Крамер (1704—1752) в письме Н. Бернулли, опубликованном Д. Бернулли в том же мемуаре.

5 Цит. по: *Граве Д.* Математика социального страхования. Л., 1924. С. 138.

К главе «Важный этап»

1 Вероятность k появлений события A при n испытаниях Бернулли вычисляется по формуле

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Рассмотрим вспомогательную переменную u и умножим левую и правую части записанного равенства на u^m. Тогда величина $P_n(k)\, u^m = C_n^k p^k q^{n-k} u^m$ будет представлять собой общий член разложения бинома $(q + pu)^m$. Следовательно, вероятность $P_n(k)$ является коэффициентом при u^k в разложении функции $\varphi_n(u) =$

$= (q + pu)^m$ по степеням u. Эта функция называется производящей для вероятностей $P_n(k)$.

[2] События образуют полную группу, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

[3] Преобразование Лапласа представляет собой соответствие между функциями $f(t)$ и $F(p)$ задаваемое формулой

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt,$$

где $p = a + ib$, $a > s_0 > 0$.

Оно составляет основу операционного исчисления и нашло широкое распространение в технических науках.

[4] Жители Беотии, провинции Древней Греции, по преданию, отличались глупостью.

[5] Частная производная функции двух переменных $z = f(x, y)$ по x вычисляется как производная по x в предположении, что значение y постоянно. Так же вычисляется и частная производная по y. (Аналогично — для функции трех переменных.)

[6] Как известно, «золотым сечением» называется деление отрезка a так, чтобы выполнялась пропорция $a : x = x : (a - x)$. Значение его в архитектуре и искусстве (и даже в структуре организмов) было замечено еще древними. Название дал Леонардо да Винчи.

[7] Институт Франции объединяет пять академий: Французскую академию, Академию надписей и изящной словесности, Академию наук (Парижскую Академию наук), Академию искусств, Академию моральных и политических наук.

[8] Разрывные множители представляют собой величины, зависящие от одного или более параметров и принимающие два или более значений. Они употребляются при суммировании или интегрировании для того, чтобы привести данное выражение к такому, к которому можно применить некоторые формулу или преобразование.

К главе «Пересмотр основ»

[1] Во время польского восстания 1830—1831 гг. Вильнюсский университет был закрыт; Ревковского осудили к смертной казни, которую впоследствии заменили пожизненной каторгой. Он несколько лет сидел в тюрьме на Кавказе, был освобожден и призван солдатом в армию, где выполнял топографические работы, получил звание капитана и диплом инженера путей сообщения. После возвращения в Вильнюс Ревковский занимался политической экономией, написал несколько книг.

[2] Статистические исследования по чередованию гласных и согласных провел А. А. Марков. Статистические методы в лингвистике широко применяются в настоящее время.

[3] Капитал эмеритальных касс составлялся из взносов служащих определенного ведомства и был предназначен для надбавок к пенсиям как самим служащим, так и их вдовам, сиротам.

[4] Эту тему диссертации Чебышеву рекомендовали, потому что для учащихся ярославского Демидовского училища не было пособия по теории вероятностей.

[5] А. Н. Демидов, из известного рода Демидовых, учредил присуждаемую ежегодно Академией наук премию в 5000 рублей за лучшие сочинения на русском языке.

6 Легенда такова. На острове Делосе, в Древней Греции, свирепствовала чума. Жители обратились к оракулу Аполлона за помощью. Он сказал, что необходимо удвоить жертвенник кубической формы. Они поставили на куб такой же куб. Оракул поправил: полученное тело должно быть в два раза больше по объему первоначального и иметь форму куба. Это означает, что если ребро куба a, то нужно найти ребро нового куба x, чтобы $x^3 = 2a^3$, т. е. $x = a\sqrt[3]{2}$. Так появилась одна из задач древности, не разрешимых с помощью циркуля и линейки.

7 Настало время пояснить слова, связанные с учеными степенями и должностями. Адъюнкт — стажер, помощник должностного лица, младшая ученая степень. Приват-доцент (privatim — частным образом, docens — обучающий) — ученое звание внештатного преподавателя университета и других высших учебных заведений. Магистр — ученая степень, присуждаемая после окончания университета, сдачи устного экзамена и публичной защиты диссертации. Давала право преподавать и заведовать кафедрой. Для получения звания экстраординарного профессора требовалась степень магистра, ординарного — доктора. Ординарный профессор заведовал кафедрой. Профессора готовились на кафедрах университетов. Они назначались Министерством народного просвещения или утверждались им по представлению университетов. Повышение экстраординарного профессора в ординарные производилось Министерством народного просвещения по представлению попечителей учебных округов. Звание заслуженного профессора присваивалось профессорам, проработавшим более 25 лет.

8 Подробное описание этой стороны деятельности Маркова читатель может найти в работах: *Марков А. А*. Биография А. А. Маркова. Избранные труды А. А. Маркова. М.: Изд-во АН СССР, 1951; *Кольцов А. В*. Некоторые материалы к биографии академика А. А. Маркова // Вопр. истории естествознания и техники. М., 1956. Вып. 1.

9 Кассация выборов — признание их недействительными ввиду нарушения порядка голосования.

10 Эргодические теоремы — класс теорем, относящихся к теории динамических систем.

К главе «Аксиоматизация. Дальнейшие приложения»

1 Если, например, бросается игральная кость, то элементарными событиями будут: выпадение единицы, выпадения двойки, тройки, четверки, пятерки, шестерки.

2 Сотрудники межфакультетской лаборатории статистических исследований Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова выпустили брошюру, в которой привели около двухсот описаний или объяснений термина «статистика» (с 1749 по 1970 г.).

Содержание

Никифоровский В. А.

Н62 Вероятностный мир.— М.: Наука, 1992.—174 с., ил.— (Серия «История науки и техники»).
ISBN 5-02-003523-8

Теория вероятностей — одна из важнейших и интереснейших ветвей математики. Возникнув из задач, связанных с азартными играми, страхованием, обработкой результатов наблюдений, демографией, правосудием, она за сравнительно короткий срок выросла в ведущую науку; ее методы позволяют осознавать закономерности окружающего нас мира и широко применяются во многих теоретических и прикладных науках. В книге прослеживаются возникновение и развитие теории вероятностей от ее основоположников — Паскаля, Ферма, Гюйгенса, Бернулли — до наших дней.

Для читателей, интересующихся математикой и ее историей.

Н $\frac{1401020000\text{-}279}{054(02)\text{-}92}$ 37—91 НП

ББК 22.171

Научно-популярное издание

Никифоровский Виктор Арсеньевич

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ
МИР

Утверждено к печати
редколлегией серии
«Научно-популярная литература»
Российской академии наук

Заведующая редакцией **Н. И. Каверина**
Редактор издательства **В. П. Лишевский**
Художник **Г. В. Равинская**
Художественный редактор **И. Д. Богачев**
Технический редактор **Т. А. Калинина**
Корректоры **В. А. Бобров, Р. В. Молоканова**

ИБ № 48352

Сдано в набор 10.12.90
Подписано к печати 24.09.91
Формат 84×108¹/₃₂
Бумага типографская № 2
Гарнитура обыкновенная. Печать высокая
Усл. печ. л. 9,45. Усл. кр. отт. 9,87. Уч.-изд. л. 9,7
Тираж 1150 экз. Тип. зак. 1597

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

Смирнов Г. В.

ВЛАДИМИР ПОЛИЕВКТОВИЧ КОСТЕНКО 1881–1956

Эта книга – первая научная биография выдающегося советского ученого-материаловеда, лауреата двух Государственных премий СССР, члена-корреспондента АН СССР Алексея Тихоновича Туманова, 35 лет возглавлявшего Всесоюзный институт авиационных материалов (ВИАМ). В биографическом очерке показано становление ученого, на основе исследования опубликованных его трудов и архивных материалов дан анализ личного вклада А. Т. Туманова в науку, в частности, в развитие высокопрочных композиционных материалов для авиационной и космической техники.

Для читателей, интересующихся историей отечественной науки и техники.

Серия «История науки и техники»

«Наука»

Невероятная эффективность математики есть нечто граничащее с мистикой.

Э. Вигнер

